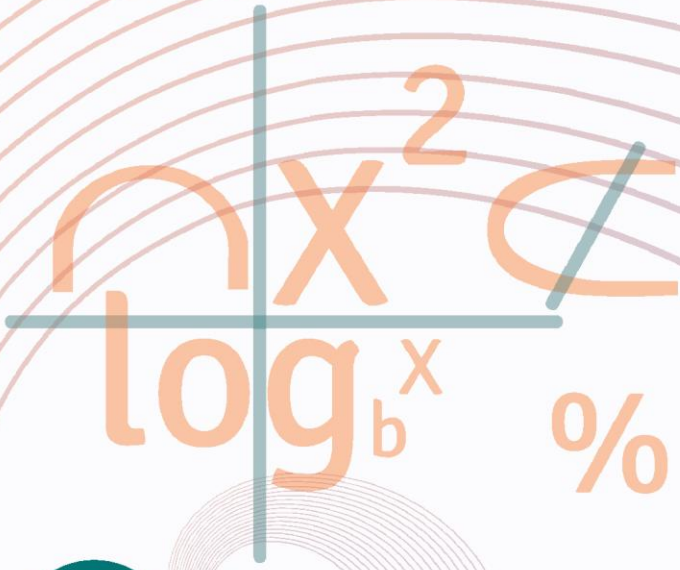
REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA



Módulo 5

Matemática

PROGRAMA DO ENSINO SECUNDÁRIO À DISTÂNCIA (PESD) 1º CICLO

FICHA TÉCNICA

Consultoria

CEMOQE MOÇAMBIQUE

Direcção

Manuel José Simbine (Director do IEDA)

Coordenação

Nelson Casimiro Zavale

Belmiro Bento Novele

Elaborador

Ginévio Manjate

Revisão Instrucional

Nilsa Cherindza

Lina do Rosário

Constância Alda Madime

Dércio Langa

Revisão Científica

Teresa Macie

Revisão linguística

Benício Armindo

Maquetização e Ilustração

Elísio Bajone

Osvaldo Companhia

Rufus Maculuve

Impressão

CEMOQE, Moçambique

Índice

INTRODUÇÃO AO MÓDULO 6

UNIDADE Nº1: TEORIA DE CONJUNTOS **10**

Lição nº1: INTRODUÇÃO A TEORIA DE CONJUNTOS 12

Lição nº 2: REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTO 15

Lição nº 3: RELAÇÃO DE PERTENÇA 18

Lição nº4: DEFINIÇÃO DE CONJUNTOS POR EXTENSÃO E POR COMPREENSÃO 21

Lição nº5: CONJUNTO VAZIO, SINGULAR E CONJUNTO UNIVERSO 23

Lição nº6: IGUALDADE DE CONJUNTOS E RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS 27

Lição nº7: OPERAÇÕES COM CONJUNTOS: REUNIÃO E INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS 31

Lição nº8: DIFERENÇA E COMPLEMENTAR DE CONJUNTO 35

Lição nº9: PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE REUNIÃO E DE INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS 38

Lição nº10: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE TEORIA DE CONJUNTOS 41

UNIDADE Nº2: EQUAÇÕES QUADRÁTICAS PARAMÉTRICAS SIMPLES **46**

Lição nº1: REVISÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS INCOMPLETAS 48

Lição nº2: REVISÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COMPLETAS 50

Lição nº3: EQUAÇÕES QUADRÁTICAS PARAMÉTRICAS SIMPLES 53

Lição nº4: RESOLVER UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES 56

UNIDADE Nº3: EQUAÇÕES BIQUADRÁTICAS **60**

Lição nº1: EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA 61

Lição nº2: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA 64

UNIDADE Nº4: FUNÇÃO QUADRÁTICA **68**

Lição nº 1: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA E ESTUDO DA FUNÇÃO $Y= AX^2$ 70

Lição nº2: GRÁFICO DA FUNÇÃO DO TIPO $Y= AX^2+C$ 75

Lição nº 3: GRÁFICO DA FUNÇÃO $F(X)=A(X-P)^2$ 80

Lição nº 4: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $(FX)= A(X-P)^2+Q$ 83

Lição nº 5: FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO $(FX)= AX^2 + B X + C$ 88

Lição nº 6: DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA A PARTIR DO GRÁFICO 91

UNIDADE Nº5: INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS **95**

Lição nº 1: IDENTIFICAÇÃO E RESOLUÇÃO GRÁFICA DE INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS 97

Lição nº2: Resolução Analítica de Inequações Quadráticas 102

LIÇÃO Nº 3: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES E INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS 104

UNIDADE Nº6: FUNÇÃO, EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS **109**

Lição nº1: EQUAÇÕES EXPONENCIAIS 111

Lição nº 2: FUNÇÃO EXPONENCIAL 113

Lição nº 3: INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS 118

UNIDADE Nº7: LOGARITMO, FUNÇÃO, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS **121**

Lição nº1: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE LOGARITMOS 122

Lição nº 2: FUNÇÃO LOGARÍTMICA 127
Lição nº 3: EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS 131
Lição nº 4: Inequações Logarítmicas 133

UNIDADE Nº8: TRIGONOMETRIA **138**
Lição nº1: REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA 139
Lição nº2: SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E ÂNGULOS ESPECIAIS 143
Lição nº3: RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 145
LIÇÃO Nº4: GRAU E O RADIANO 148
LIÇÃO Nº5: EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 150

UNIDADE Nº9: ESTATÍSTICA **154**
Lição nº1: CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA 156
Lição nº 2: DISTRIBUIÇÃO E DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIA 161
Lição nº3: MÉDIA E MODA 167
Lição nº 4: MEDIANA 172

UNIDADE Nº10: GEOMETRIA ESPACIAL **179**
Lição nº 2: Postulados (axiomas) 182
Lição nº 3: POSIÇÕES RELATIVAS 186

MENSAGEM DA SUA EXCELÊNCIA MINISTRA DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

CARO ALUNO!

Bem-vindo ao Programa do Ensino Secundário à Distância (PESD).

É com grata satisfação que o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano coloca nas suas mãos os materiais de aprendizagem especialmente concebidos e preparados para que você e muitos outros jovens e adultos, com ou sem ocupação profissional, possam prossseguir com os estudos ao nível secundário do Sistema Nacional de Educação, seguindo uma metodologia denominada por "Ensino à Distância".

Com este e outros módulos, pretendemos que você seja capaz de adquirir conhecimentos e habilidades que lhe vão permitir concluir, com sucesso, o Ensino Secundário do 1º Ciclo, que compreende a 8ª, 9ª e 10ª classes, para que possa melhor contribuir para a melhoria da sua vida, da vida da sua família, da sua comunidade e do País. Tendo em conta a abordagem do nosso sistema educativo, orientado para o desenvolvimento de competências, estes módulos visam, no seu todo, o alcance das competências do 1º ciclo, sem distinção da classe.

Ao longo dos módulos, você irá encontrar a descrição do conteúdo de aprendizagem, algumas experiências a realizar tanto em casa como no Centro de Apoio e Aprendizagem (CAA), bem como actividades e exercícios com vista a poder medir o grau de assimilação dos mesmos.

ESTIMADO ALUNO!

A aprendizagem no Ensino à Distância é realizada individualmente e a ritmo próprio. Pelo que os materiais foram concebidos de modo a que possa estudar e aprender sózinho. Entretanto, o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano criou Centros de Apoio e Aprendizagem (CAA) onde, juntamente com seus colegas se deverão encontrar com vários professores do ensino secundário (tutores), para o esclarecimento de dúvidas, discussões sobre a matéria aprendida, realização de trabalhos em grupo e de experiências laboratoriais, bem como da avaliação formal do teu desempenho, designada de Teste de Fim do Módulo (TFM). Portanto, não precisa de ir à escola todos dias, haverá dias e horário a serem indiçados para a sua presença no CAA.

Estudar à distância exige o desenvolvimento de uma atitude mais activa no processo de aprendizagem, estimulando em si a necessidade de muita dedicação, boa organização, muita disciplina, criatividade e sobretudo determinação nos estudos.

Por isso, é nossa esperança de que se empenhe com responsabilidade para que possa efectivamente aprender e poder contribuir para um Moçambique Sempre Melhor!

BOM TRABALHO!

Maputo, aos 13 de Dezembro de 2017

CONCEITA ERNESTO XAVIER SORTANE
MINISTRA DA EDUCAÇÃO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO

Av. 24 de Julho 167-Telefone nº21 49 09 98-Fax nº21 49 09 79-Caixa Postal 34-EMAIL: L_ABMINEDH@minedh.gov.mz ou L_mined@mined.gov.mz

mfm

INTRODUÇÃO AO MÓDULO

Bem-vindo ao módulo de Matemática

A Matemática é uma parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao jovem fazer escolhas de profissão, ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e sentir-se motivado para continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual o estudante se comunica e se relaciona com os outros, e para a qual a Matemática fornece instrumentos de compreensão mais profunda, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.



O presente módulo está estruturado de forma a orientar claramente a sua aprendizagem dos conteúdos propostos por esta classe. Estão apresentados nele conteúdos, objectivos gerais e específicos bem como a estratégia de como abordar cada tema desta classe.

ESTRUTURA DO MÓDULO

Este módulo é constituído por 10 (dez) unidades temáticas, que contem 44 lições. Seguidamente apresentamos as unidades temáticas.

Unidade nº1: Teoria de conjunto;

Unidade nº2: Equações quadráticas paramétricas simples;

Unidade nº3: Equações biquadrática;

Unidade nº4: Funções quadráticas

Unidade nº5: Inequações quadráticas;

Unidade nº6: Funções exponenciais;

Unidade nº7: Logaritmo e Funções Logarítmicas;

Unidade nº8: Trigonometria;

Unidade nº9: Estatística;

Unidade nº10: Geometria espacial.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM DO MÓDULO

No final do estudo deste modulo, esperamos que você seja capaz de:

- Aplicar conceitos, símbolos e operações, sobre conjuntos na resolução de problemas Matemáticos e de outras áreas de conhecimento;
- Interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões);
- Aplicar propriedades na resolução de exercícios e problemas matemáticos;
- Utilizar correctamente instrumentos de medição;
- Estimar quantidades;
- Interpretar fenómenos sociais, económicos, naturais, etc. a partir de tabelas e gráficos;
- Desenvolver capacidades para a busca de informação em diferentes meios, e uso de tecnologia, mostrando curiosidade e disposição para a busca de novos conhecimentos;
- Resolver problemas matemáticos que reflectem situações quotidianas da vida económica e social do país e do mundo.

ORIENTAÇÕES PARA O ESTUDO

Estimado estudante, para ter sucesso no estudo deste módulo, é necessário muita dedicação, portanto aconselhamos o seguinte:

- Tenha um caderno especialmente para Matemática, e o conserve para estudos deste módulo;
- Procure estar em um ambiente tranquilo e apropriado antes de iniciar a estudar cada lição;
- Em todas suas horas de estudo, leia atenciosamente repetitivamente cada lição, para melhor compreensão;
- Busque basear-se no máximo nos exemplos, caso não perceber, torne a ler toda a lição que não percebeu, se persistir a dúvida, anote-a para buscar ajuda no Centro de Apoio e Aprendizagem (CAA);
- Garanta a resolução de 100% das auto-avaliações propostas no final de cada lição e confirme as suas respostas com a Chave de Correcção, se detectar erro na sua resolução, torne a ler as matérias não percebidas e tente responder de novo as questões que errou;
- Face o resumo das matérias estudadas, anotando as propriedades a serem aplicadas;
- Ser cuidadoso ao copiar os números e ao estudar os símbolos, sinais e termos matemáticos.

Símbolos

Ao longo das lições você vai encontrar Símbolos que o orientarão na aprendizagem:

Símbolos	**Leitura**
$\in$	pertence
$\notin$	não pretence
$\subset$	está contido
$\not\subset$	não está contido
$\supset$	Contém
$\not\supset$	não contém
$<$	menor que
$>$	maior que
$\leq$	menor ou igual
$\geq$	maior ou igual
IR	conjunto dos números reais
$\exists$	existe
$\nexists$	não existe
$\forall$	para todo (ou qualquer que seja)
$\varnothing$	conjunto vazio
\ ou $\neq$	diferente
/ ou :	tal que
$\Rightarrow$	implica que ou entao
$\Leftrightarrow$	se, e somente se ou equivale a…

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

No fim de cada lição, são apresentadas Actividades da Lição que o ajudarão a avaliar o seu desempenho e melhorar a sua aprendizagem. No final de cada unidade temática também será apresentado um teste de Actividades da Unidade, contendo os temas tratados em todas as lições, que tem por objectivo o preparar para a realização da prova. As Actividades são acompanhadas de chave de correcção com respostas ou indicação de como deveria responder as perguntas, que você deverá consultar após a sua realização. Caso você acerte acima de 70% das perguntas, consideramos que está apto para fazer a prova com sucesso.

1 UNIDADE Nº1: TEORIA DE CONJUNTOS

INTRODUÇÃO



Estimado(a) estudante(a) bem-vindo ao estudo do Modulo. A unidade temática de **Teoria de Conjuntos** será a primeira a ser abordada nesta classe e é uma unidade de fácil compreensão, requerendo apenas a sua atenção e esforço para um bom desempenho. Será abordado acerca de: identificação e formas de apresentação de conjuntos, uso de símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos, operações que podem ser efectuados com conjuntos e ilustrações que permitirão desenvolverem habilidades para resolver problemas da vida real através da teoria conjuntos. Esta unidade contém 10 (dez) lições, que são:

Lição 1: Introdução a Teoria de conjuntos;

Lição 2: Representação de Conjunto;

Lição 3: Relação de Pertença;

Lição 4: Definição de Conjuntos por Extensão e por Compree

Lição 5: Conjunto Vazio, Unitário e Conjunto Universal;

Lição 6: Igualdade de conjuntos e Relação entre Conjuntos;

Lição7: Operações com conjuntos;

Lição 8: Diferença de conjuntos;

Lição 9: Propriedades das Operações de Reunião de Conjuntos;

Lição10: Resolução de problemas através de conhecimento de conjuntos.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos;
- Representar um conjunto por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn e chavetas;
- Efectuar as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos;
- Resolver problemas concretos da vida real, aplicando propriedades das operações sobre conjuntos.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Teoria de Conjunto**, você:

- Identifica elemento de um conjunto;
- Usa os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos;
- Representa conjuntos por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn e chavetas;
- Efectua as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos;
- Resolve problemas concretos da vida real, aplicando propriedades das operações sobre conjuntos

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática, você vai precisar de 18 horas e 10 minutos.

MATERIAIS BÁSICOS

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

Lição nº1:
INTRODUÇÃO A TEORIA DE CONJUNTOS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Os conjuntos têm uma grande importância na matemática. De maneira formal, os vários temas abordados na matemática (números, relações, funções, equações, etc.) podem ser definidos em forma de conjuntos.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao concluir esta lição deve ser capaz de:

- Definir teoria de conjunto e conjuntos;
- Identificar elementos de um conjunto.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição Introdução a Teoria de Conjuntos, você vai precisar de 1 hora e 30 minutos.

1.1.1.Teoria de conjuntos

Caro estudante, **Teoria de conjuntos** é a teoria matemática que se dedica ao estudo da associação entre objectos ou elementos com a mesma propriedade.

Conjunto é uma colecção bem definida de entidades ou objectos com a mesma propriedade.

Exemplos:

• Conjunto de bananas;

• Conjunto de números pares;

• Conjunto de animais domésticos;

• Conjunto de múltiplos de 5, etc.

1.1.2. Elementos de um conjunto

Aos objectos que constituem um conjunto denominam-se **elementos** do conjunto.

Exemplos:

• Banana maçã pode ser um elemento de um conjunto Bananas;

• 2 é um elemento do conjunto de números pares;

• 5, 10, 15, 20, cada um destes números, é elemento do conjunto de múltiplos de 5, etc.

Caro estudante, terminada a aula de **Introdução Teoria de Conjuntos**, você pode resolver os exercícios abaixo:

1. Com base nas seguintes palavras e números (Tete, Manga, Sofala, laranja, Manica, Gaza, banana, papaia**,** 1,3,5,7,9,11), forme 3 conjuntos e atribua nome aos conjuntos formados.

2. Caro estudante, agora retire elementos que não fazem parte de cada conjunto abaixo:

a) Conjunto de países. D = {Moçambique, Maputo, Angola, África do Sul, Sofala, Madagáscar};

b) Conjunto de números pares menores que 10. E = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10};

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Conjunto de províncias (Moçambique) = {Tete, Solafa, Manica, Gaza};

Conjunto de frutas ={Manga, laranja, banana, papaia};

Conjunto de números ímpares ={1,3,5,7,9,11}.

2. a)Os elementos que não fazem parte do conjunto D são: Maputo e Sofala;

b) Os elementos que não fazem parte do conjunto de números pares menores que 10 são: 1; 3; 5; 7; 9.

Lição nº 2:
REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTO



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, na aula passada definimos conjunto e seus elementos. Dando continuidade a teoria de conjuntos, vamos representar estudar como representar um conjunto, assim nesta lição vai aprender as formas correctas de representação de conjuntos.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Representar os conjuntos.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Representação de Conjunto** vai precisar de 1 horas e 30.

1.2.1. Representação de Conjunto

Caro estudante, para dar nome a um conjunto, usa-se letras maiúsculas do alfabeto (designação de um conjunto). Nesta representação, todos os elementos do conjunto são apresentados numa lista, envolvidos por um par de chavetas e separados por ponto e vírgula ou por vírgula.

Exemplos 1:

Conjunto de Vogais. B = {a, e, i, o, u} (conjunto finito);;

Conjunto de números pares. A= {2; 4; 6; 8;10;12;14, …} (conjunto infinito);

Conjunto de cores. C= {amarelo, branco, vermelho, azul} (conjunto finito);

P ara fazer a representação de um conjunto pela propriedade que caracteriza seus elementos, é feita da seguinte forma:

Exemplos 2:

A = {a, b, c, d, e, f, g}

Os elementos desse conjunto são as letras do alfabeto entre a letra ‘a’ e a letra ‘g’. Então:

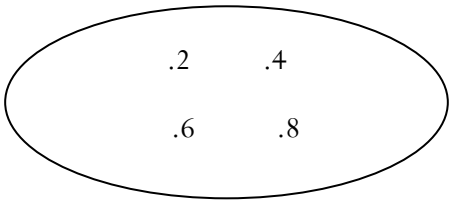
A = {as letras do alfabeto entre a letra ‘a’ e a letra ‘g’}.

Exemplos 3:

B = {x | x é toda fruta que começa por letra m}, lê-se conjunto B é formado pelas frutas que iniciam com letra m, é uma forma resumida de representar conjuntos que caso contrario seria necessário uma longa lista de elementos para representar o conjunto, para este caso concreto seria: B= {manga, maça, morango, melão, maracujá, melancia, mamão}.

Caro estudante, além das duas formas acima para representar um dado conjunto, podemos também representar um dado conjunto por meio de um recinto plano limitado por uma curva fechada, chamada **Diagrama de Venn**.

Exemplo: Represente num **Diagrama de Venn** o conjunto de números pares positivos menores que 9:



ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que já terminou a aula de representação de Conjuntos, você pode resolver os exercícios proposto:

1. Represente por chavetas os seguintes conjuntos:

Conjunto S, de disciplinas de: Matemática, Biologia, Física e Química;

a) Conjunto O, de números reais: -1, 3, -13, 2, 16, 15,0, $\frac{25}{5}$.

2. Represente por diagrama de Venn os seguintes conjuntos:

a) I= {amarelo, branco, vermelho, azul};

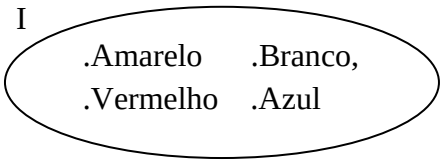
b) J = {1; 2; 10; 3; 4; 7; 9}.

CHAVE DE CORRECÇÃO

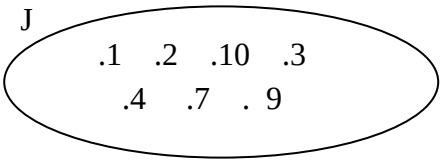
1. a) S= {Matemática, Biologia, Física e Química};

b) O= {-1, 3, -13, 2, 16, 15,0, $\frac{25}{5}$} (não importa a ordem dos elementos).

2. a)



b)



Lição nº 3:
RELAÇÃO DE PERTENÇA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, dando continuidade ao estudo da Teoria de Conjunto. Como já aprendeu o que é conjunto, o que é elemento de um conjunto e como representar um conjunto, nesta lição vai aprender a relacionar um conjunto e seus elementos (estabelecer a relação de pertença de um elemento e um dado conjunto).



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar os símbolos da relação de pertença;
- Estabelecer a relação de pertença entre elementos e um dado conjunto.



TEMPO DE ESTUDO

Caro estudante, para estudar a lição relação de pertença vai precisar de 1 horas e 30 minutos.

1.3.1. Relação de Pertença

Caro estudante, na relação de pertença verifica se um determinado elemento pertence ou não a um dado conjunto. Se o elemento aparece no conjunto usamos o símbolo $\in$, que significa pertence ao conjunto e se o elemento não foi mencionado no conjunto em causa usamos o símbolo $\notin$ (não pertence).

Exemplo 1:

Assim, consideramos conjunto dos número pares menores que 15: A= {2; 4;10;14;12, 6; 8}, estabelecendo a relação de pertença, concluímos que:

Escrita	Leitura

$2 \in A$	O elemento 2 Pertence ao conjunto A
$4 \in A$	O elemento 4pertence ao conjunto A
$14 \in A$	O elemento 14pertence ao conjunto A
$3 \notin A$	O elemento 3 Não pertence ao conjunto A
$5 \notin A$	O elemento 5 não pertence ao conjunto A

Exemplo 2:

Somos dado o conjunto B= {matemática, física, química, desenho, geografia}, com base neste conjunto podemos afirmar que:

Escrita	**Leitura**
Educação Física $\notin$B	Educação Física não pertence ao conjunto B
Química $\in$ B	Química pertence ao conjunto B
Matemática $\in$B	A disciplina de matemática pertence ao conjunto B
Língua Inglesa $\notin$A	Língua Inglesa não pertence ao conjunto B

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim chegamos ao fim de mais uma lição, gora vai resolver os seguintes exercícios:

Estabeleça a relação de pertença nos conjuntos abaixo, usando os símbolos: $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

V= {-1, 3, -13, 2, 16, 15,0, $\frac{25}{5}$};

W= {Matemática, Biologia, Física e Química};

X = {1; 2; 10; 3; 4; 7; 9}.

a) 1_____V

b) -1_____V

c) 5_____W

d) 10 _____X

e) Física _____W

f) Desenho _____W

g) 3 _____ X

h) 7_____X

i) Biologia _____V

j) $\frac{25}{5}$_____V

K) 9 _____X

l) História _____W

CHAVE DE CORRECÇÃO

a) 1 ___ $\notin$ ___ V

b) -1 ___ $\in$ ___ V

c) 5 ___ $\notin$ ___ W

___ $\in$ ___ X

d) 10 ___ $\in$ ___ X

e) Física ___ $\in$ ___ W

f) Desenho ___ $\notin$ ___ W

g) 3 ___ $\in$ ___ X

h) 7 ___ $\in$ ___ X

i) Biologia $\notin$ V

j) $\frac{25}{5}$ ___ $\in$ ___ V

K) 9

l) História $\notin$ W

Lição nº4:
DEFINIÇÃO DE CONJUNTOS POR EXTENSÃO E POR COMPREENSÃO



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Os conjuntos podem ser definidos de duas formas, e nesta lição iremos claramente tratar acerca de como definir os Conjuntos por Extensão e por Compreensão.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir os conjuntos por extensão;
- Definir os conjuntos por compreensão.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Definição de Conjuntos** vai precisar de 1 hora e 40 minutos.

1.4.1. Definição de Conjuntos por Extensão e por Compreensão

1.4.1.1. Definição de Conjuntos por Extensão

Caro estudante, na **definição de conjuntos por extensão,** enumera-se os seus elementos dentro de chavetas ou diagrama de Venn, como já estudamos anteriormente na representação de conjuntos na lição nº 2.

Exemplo1:

Neste exemplo, iremos representar por extensão o conjunto dos dias da semana: {segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}.

Exemplos 2: para mais esclarecimento acerca de definição de conjunto por extensão, veja mais dois exemplos.

a) Conjunto dos números ímpares (A), a sua definição por extensão fica: {1, 3, 5,7,9,11 ...};

b) Conjunto dos números pares positivos, menores que 50, por extensão é {2, 4, 6,8,10 ..., 48};

1.4.1.2. Definição de Conjuntos por Compreensão

Agora, a **Definição de Conjuntos por Compreensão** é representado por meio de uma propriedade que caracteriza os seus elementos.

Exemplos:

a) A = {x| x é um número inteiro e x> 8}

Lê-se x é todo número inteiro maior que 8. Neste caso o x é considerado como se fosse um destes números: 9,10, 11, 12, …, até o mais infinito.

Neste conjunto (A), achou-se uma propriedade (número inteiro x > 8) para representar os elementos do conjunto sem enumera-los, por isso que é designado definição de conjunto por compreensão.

b) B = {x| x é vogal}

Caro estudante, neste caso também apresenta uma propriedade que x pode ser assumido como a, e, i, o ou u.

A propriedade que caracteriza o conjunto permite determinar se um dado elemento pertence ou não ao conjunto. Ora vejamos: A propriedade atribuída ao x no conjunto B é de que é vogal, por isso, pode-se estabelecer as seguintes relações de pertença:

i. s ___$\notin$___B
ii. u___$\in$___B
iii. e ___$\in$___B
iv. k___$\notin$___B
v. v ___$\notin$ B
vi. a___$\in$___B

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição, resolva os seguintes exercício:

Exercícios:

a) Caro estudante, escreva por extensão o conjunto Z, dos primeiros 5 meses do ano;
b) Escreva por extensão o conjunto Y, de 5 primeiros múltiplos de 6;
c) Diga se os elementos abaixo $\in$ (pertencem) ou $\notin$ (não pertencem) ao conjunto T = {x| x é um número inteiro menor que 8}.

i. -7 _____T
ii. 1_____T
iii. 1000 _____T
iv. 133_____T
v. 10_____ T
vi. -10_____T

CHAVE DE CORRECÇÃO

Respostas do exercício:

a) Z= {Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio};

b) Y={0, 6, 12, 18, 24};

c) i. -7 ___∈__T iii. 1000 ___∉__T v. 10___∉__T

ii. 1___∈__T iv. 133___∉__T vi. -10___∈__T

Lição nº5:
CONJUNTO VAZIO, SINGULAR E CONJUNTO UNIVERSO

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro, nesta lição iremos aprender acerca de **Conjunto Vazio, singular e Universo.**

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar os Conjuntos Vazios e Singular;
- Identificar os Conjuntos Universo;

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Conjunto Vazio, Singular e Universo** vai precisar de 1 hora e 50 minutos.

1.5.1. Conjunto Vazio

Conjunto vazio: é um conjunto que não possui elementos. O conjunto vazio é representado simbolicamente por { } ou Ø .

Exemplo 1:

Conjunto P dos números pares, que terminam por 1, é um conjunto vazio, pois não existe número par que termine por 1.

Então P= { } ou P= Ø.

Exemplo 2:

Conjunto S de dinossauros vivos, este conjunto também é vazio, porque não existe dinossauros vivos. Simbolicamente S = { } ou S = Ø.

1.5.2. Conjunto singular

Chama-se singular ao conjunto constituído por um único elemento.

Exemplo 1: K= {3} Sendo K o conjunto de um número impar 3.

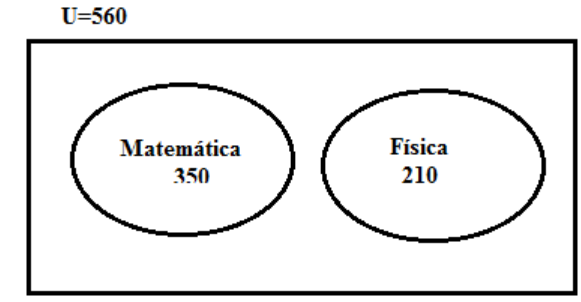
1.5.3. Conjunto Universo

Caro estudante, ao conjunto que contém todos os conjuntos estudados, chama-se conjunto universo.

Pode conter um número finito ou infinito de objectos ou elementos, mas deve conter pelo menos mais de um elemento e é sempre designado pela letra U.

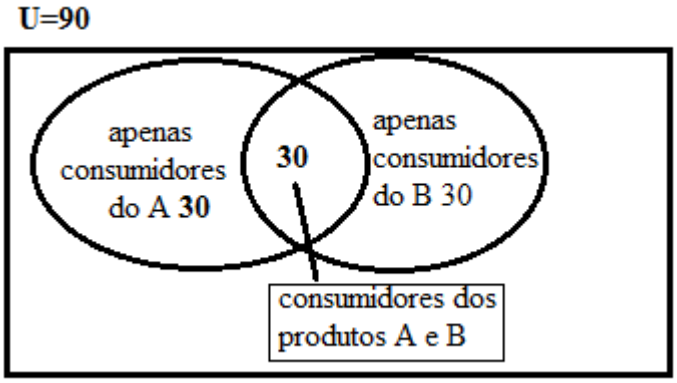
Exemplos:

Foram envolvidos numa pesquisa 350 estudantes que estudam Matemática, e 210 que estudam Física. Matematicamente temos:



Exemplo2:

Foi realizado ainda um outro estudo em que envolveram 60 consumidores do produto A, 60 do produto B e 30 consumidores dos produtos A e B. Para achar ou representar o universo, fazemos:



O universo neste estudo é de 90 consumidores.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, agora resolve os exercícios que se seguem.

1. Com base nos conjuntos F= { }, G = {1 }, H= Ø, preencha os espaços vazios com uma das seguintes palavras: conjunto vazio, conjunto unitário.

i. O conjunto F é um _____;

ii. O conjunto G é _____;

iii. Conjunto H _____.

CHAVE DE CORRECÇÃO

i. Conjunto vazio;

ii. Conjunto unitário;

iii. Conjunto vazio.

Lição nº6:
IGUALDADE DE CONJUNTOS E RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Dando continuidade com os nossos estudos sobre Teoria de Conjuntos, nesta lição iremos falar de igualdade de conjuntos e relação entre conjuntos.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar os conjuntos iguais;
- Estabelecer relação entre conjuntos.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de igualdade de conjuntos e relação entre conjuntos vai precisar de 1 horas e 50 minutos.

1.6.1. Igualdade de conjuntos e relação entre conjuntos

1.6.1.1. Igualdade de conjuntos

Para percebermos acerca de igualdade de conjuntos, consideremos os conjuntos A e B. Dizemos que o conjunto A é igual ao conjunto B, se eles possuírem os mesmos elementos, não importando a ordem. Indica-se por **A = B**

Observe os seguintes exemplos:

a) C = {a, e, i, o, u}
   D = {a, e, u, o, i}

O conjunto C é igual ao D, simbolicamente C= B.

Como T={2,4,6} e U= {2, 4, 6}, também dissemos que T=U;

b) Mas se G={10,20,30} e H={10,15,20,25} dissemos que G≠ H (G é diferente de H).

1.6.1.2. Relação entre Conjuntos

Caro estudante, para estabelecermos a relação entre conjuntos usaremos alguns símbolos, no entanto a tabela abaixo tem os símbolos que nos ajudarão a relacionar vários conjuntos:

Símbolo	Significado
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não contém

Importa salientar que usamos os símbolos acima para estabelecer relação entre conjuntos e não entre elementos e conjunto.

Exemplo 1: Para melhor percebermos como estabelecer a relação entre os conjuntos, observemos os seguintes exemplos.

Somos dados os conjuntos:

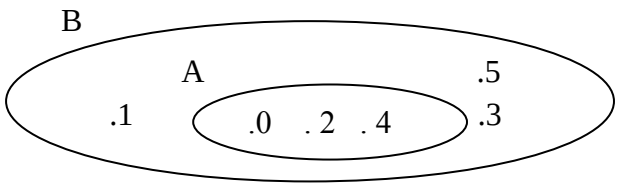
A = {0, 2, 4};

B ={0, 1, 2, 3, 4, 5};

Observando com cuidado os 2 conjuntos, notamos que:

a) Todos os elementos do conjunto A ={0, 2, 4} estão também no conjunto B={**0**, 1, **2**, 3, **4**, 5}, quando isto acontece podemos afirmar que A é **subconjunto** de B, ou seja, o conjunto A **está contido** no conjunto B, simbolicamente A$\subset$B;

b) O conjunto B **contém** elementos do Conjunto A, simbolicamente **B $\supset$ A,** lê-se B **contém** A



Com certeza o diagrama acima, ajuda-nos aperceber a relação entre conjunto A e o conjunto B, como vemos o conjunto A está dentro B, ou seja, **está contido** no B **(A$\subset$B),** na mesma lógica aro estudante, o conjunto B **contém** dentro dele o conjunto A **(B $\supset$A).**

Exemplo 2: Observando o conjunto B e C, apesar de haver alguns elementos iguais, conclui-se que:

a) O conjunto B **não está contido** no conjunto C, simbolicamente traduz -se ($B \not\subset$ **C)**, porque não achamos todos os elementos do conjunto B no conjunto C.

Do mesmo modo, podemos concluir que o conjunto C não contém o conjunto B, simbolicamente escreve-se ($C \not\supset B$), porque dentre os elementos do conjunto C não incluem todos elementos do conjunto B.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante para provar que percebeu a matéria de relação de conjuntos ou subconjuntos, faça os seguintes exercícios:

1. Seja dado os conjuntos abaixo, agrupe os conjuntos que considera iguais (=).

T={a,b,c,d,e,f,g}; S={1,3,5,6,7,}; K={x| x é um número impar}; L={x| x é todo o mês que inicia com letra J }; M={Junho, Março, Janeiro, Agosto, Julho}; R={6,7,5,1,3}; V ={Junho, Janeiro, Julho} e Z={a,b,c,d,e,f,g,h,i}.

2. Caro estudante, com base nos conjuntos, D= {Abril, Maio, Março, Junho, Julho} e E= {Abril; Março; Julho}, diga se as alternativas que se seguem são falsas (F) ou verdadeiras (V):

i. $D \subset E$_____ iv. $D \not\subset E$_____

ii. $E \supset D$_____ v. $E \subset D$_____

iii. $D \supset E$_____ vi. $E \not\subset D$ _____

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. São conjuntos iguais: L=V e S=R.

2.i. $D \subset E$: Falsa

ii. $E \supset D$: Falsa

iii. $D \supset E$: Verdade

iv. $D \not\subset E$: Verdade

v. $E \subset D$: Verdade

vi. $E \not\subset D$: Falsa.

Lição nº7:
OPERAÇÕES COM CONJUNTOS: REUNIÃO E INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Anteriormente estudamos acerca de relação de pertença (relação entre conjuntos e elementos) e relação de inclusão (relação entre conjuntos) mais não é só isso que se pode fazer em torno de conjuntos, também pode-se fazer operações de Reunião e Intersecção de Conjuntos.

E nesta lição vamos aprender operações com conjuntos: Reunião e Intersecção de Conjuntos.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

Efectuar a operação de reunião de conjuntos;

Efectuar a operação de intersecção de conjuntos.

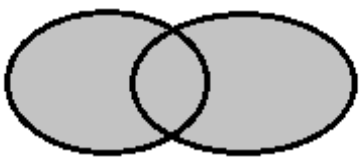
TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de operações com conjuntos: reunião e intersecção de conjuntos, vai precisar de 2 horas.

1.7.1. Operações com conjuntos:

1.7.1.1. União de Conjuntos

Para entendermos acerca de união de conjuntos, consideremos os conjuntos A e B, a **união** de A e B, denotada por **A ∪ B**, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou em B, ou em ambos conjuntos. A união de conjuntos é indicada simbolicamente assim: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;



A ∪ B

Exemplos:

a) Temos os conjuntos A= {1, 2,} e B= {3, 4}. A união destes dois conjuntos resulta em:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;

Repare que a união dos dois conjuntos é apenas a junção dos elementos do conjunto A com o conjunto B.

b) Somos dados os seguintes conjuntos C = {a, b, d, f, j} e D= {d, f, e, g, h}, fazendo a união destes dois conjuntos, obtemos:

$C \cup D$= {a, b, d, e f, g, h, j};

Caro estudante, a operação foi a mesma de juntar os elementos do conjunto C e D, e os elementos que estão nos dois conjuntos (d, f) não é necessário repeti-los, apenas escrevem-se uma vez no novo conjunto da união dos dois conjuntos.

1.7.1.2. Intersecção de Conjuntos

Caro estudante, consideremos que temos 2 conjuntos A e B, há intersecção do conjunto A e B ($A \cap B$), quando o conjunto A contem elementos que estão também em B (elementos que aparecem ao mesmo tempo nos dois conjuntos): $A \cap B = \forall x\ (x \in A \text{ e } x \in B)$.



$A \cap B$

Exemplos: determina a intersecção dos conjuntos abaixo:

a) K= {1, 2,7, 6,5,4} e L= {,8, 5, 3, 4}.

A intersecção destes dois conjuntos resulta em: $K \cap L = \{5, 4\}$;

Amigo, note que os elementos 5 e 4 aparecem tanto no conjunto K como no conjunto L, sempre que se tratar de intersecção devemos seleccionar elementos que aparecem nos dois conjuntos.

Somos dados os seguintes conjuntos C= {azul, branco, preto} e D= {vermelho, preto, azul, castanho}, fazendo a intersecção destes dois conjuntos, obtemos: $C \cap D$= {preto, azul}, porque são essas duas cores que estão nos dois conjuntos.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante para provar que percebeu a matéria de união e intersecção de conjuntos, faça cuidadosamente os exercícios que se seguem.

1. Com base nos conjuntos dados, faça a operação de união de conjuntos:

a) I= {Matemática, História, Biologia} e J= {Física, Matemática, Desenho, Química};

b) K = {3,5,7,9} e L = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8}.

2. Com base nos conjuntos das alíneas a) e b) faça a operação de intersecção.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Operação de união de conjuntos

a) IUJ = {Matemática, História, Biologia, Física, Desenho, Química};

b) KUL= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

2. Operação de intercessão de conjuntos

a) I ∩ J = {Matemática};

b) K ∩ L= {3,5,7}.

Lição nº8:
DIFERENÇA E COMPLEMENTAR DE CONJUNTO

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Nesta lição vamos aprender as operações de Diferença e Complementar de Conjunto.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

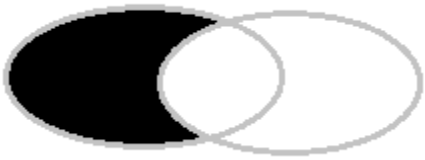
- Diferenciar um conjunto do outro;
- Determinar o complementar de conjunto.

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Diferença e Complementar de Conjunto vai precisar de 1 horas e 50 minutos.

1.8.1. Diferença de conjuntos

Se A e B são conjuntos, a diferença de A e B, escreve-se A - B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B, simbolicamente: $A - B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \notin B\}$.



A - B

Exemplos: Façamos a diferença dos conjuntos abaixo:

a) Z= {banana, maçã, laranja, papaia} e Y= {manga, banana, papaia, ananás}

Com base na explicação as frutas que formarão o conjunto da diferença Z-Y são laranja e maçã, porque estas duas frutas não aparecem no conjunto Y, matematicamente temos: Z-Y= {maçã, laranja};

b) Somos dados duas caixas com folhas de vários tamanhos, assim apresentadas: T={ A1, A2, A3, A4, A5 } e U={ A2 e A3}. Neste caso a diferença entre a primeira e a segunda caixa, T-U= {A1, A4 e A5}, porque estes elementos não estão na segunda Caixa.

c) {a, b} – {a, b, c, d, e} = Ø (conjunto vazio) porque não há nenhum elemento que está no primeiro conjunto que não esteja no segundo.

1.8.2. Complementar de Conjunto em relação ao outro

d) Dados os conjuntos A e B, se o conjunto B está contido no conjunto A, a diferença A – B, é chamada **complementar** de B em relação a A, é indicado por $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ ou $\bar{\mathbf{A}}$ ou A-B.

Agora, vejamos os **exemplos** abaixo:

a) Seja A= {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} e B= {1, 3, 5, 7}, o complementar de B em relação a A:

$\bar{B}$ =A-B= {0; 4; 6; 8; 9}.

b) R = {a, b, c, d, e, f} e S = {a, b} o complementar de S vem de R– S = {c, d, e, f} ou $\overline{S}$ ={c,d,e,f}

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, agora faça cuidadosamente os seguintes exercícios

1. Determine a diferença dos seguintes conjuntos:

a) C={a,b,m,n,p}e B= { f,g,h,i,j,o,q,m,n }, C-B;

b) M = { 0,1, 6,7} e N = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, N-M;

c) K={Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio}; e S={ Março, Abril, Maio}, S-K.

2. Somos dados os seguintes conjuntos: K = {3,5,7,9} e L = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9}, ache o complementar do conjunto K em relação a L.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) C-B={a,b,p}; b) N-M= { 2, 3, 4, 5}; c) S-K={ }ou Ø.
2. L-K= {1, 2, 4, 6, 8}.

Lição nº9:
PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE REUNIÃO E DE INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Lembra-se caro estudantes, que anteriormente estudamos acerca das operações de conjunto tais como: intersecção, reunião, diferença. Nesta lição vamos apresentar as principais propriedades das operações de reunião e intersecção de conjuntos.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar as propriedades da reunião e da intersecção de conjuntos;
- Aplicar propriedades nas operações de reunião e intersecção de conjuntos.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Propriedades das Operações de Reunião e de e intersecção Conjuntos vai precisar de 2 horas.

1.9.1. Propriedades das Operações de Reunião de Conjuntos

Para todas as propriedades abaixo, considere A, B, C três conjuntos quaisquer, U (conjunto universo) e $\varnothing$ conjunto vazio.

Propriedades da Reunião de Conjuntos

1. **Comutativa**: Quaisquer que sejam os conjuntos tais como A e B, tem-se:
$A \cup B = B \cup A$.

2. **Associativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos tais como A, B e C tem-se
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3. **Conjunto vazio = Elemento neutro na reunião:**
$A \cup \varnothing = A$

4. **Conjunto Universal = Elemento absorvente na reunião:**
$U \cup A = U$

5. **Distributividade da Reunião em relação à Intersecção:** Quaisquer que sejam os conjuntos tais como A, B e C, tem-se

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.9.2. Propriedades da Intersecção De Conjuntos

1. **Comutativa**: Quaisquer que sejam os conjuntos como A e B, tem-se:
$A \cap B = B \cap A$
2. **Associativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos tais como A, B e C tem-se
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. **Conjunto Universal = Elemento neutro na intersecção**
$U \cap A = A$
4. **Elemento absorvente na Intersecção:**
$A \cap \varnothing = \varnothing$
5. **Distributividade da Intersecção em relação à Reunião:** Quaisquer que sejam os conjuntos como A, B e C, tem se
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Terminada a lição de Propriedades das Operações de Reunião e Intersecção de Conjuntos, Caro estudante, resolva cuidadosamente os seguintes exercícios.

A = {3,5,7,9}, B= {1, 2, 3, 4, 5} e C= {3,5,7,9} são três conjuntos quaisquer, U (conjunto universo) e $\varnothing$ conjunto vazio.

Com base nas propriedades das operações de união e de intersecção de conjuntos estudadas anteriormente e com os conjuntos acima dados, diga se as afirmações abaixo são falsas (F) ou verdadeiras (V):

a) $A \cap B = C$:_____

b) $A \cup B = B \cup C$:_____

c) $A \cap B = B \cup A$:_____

d) $C \cap \varnothing = C$:_____

e) $C \cup B = \varnothing$:_____

f) $A \cup C = B$:_____

g) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$:_____

h) $U \cap A = U$:_____

CHAVE DE CORRECÇÃO

a) $A \cap B = C$: F

b) $A \cup B = B \cup C$: F

c) $A \cap B = B \cup A$: F

d) $C \cap \varnothing = C$: F

e) $C \cup B = \varnothing$: F

f) $A \cup C = B$: F

g) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: V

h) $U \cup A = U$: V

Lição nº10:
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE TEORIA DE CONJUNTOS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Depois de termos estudado várias lições de teoria de conjunto, agora é momento de usarmos todos os conhecimentos anteriormente adquiridos para resolução de problemas reais. Por isso na presente lição vamos aprender como equacionar e resolver problemas de teoria de conjuntos.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Equacionar problemas sobre teoria de conjuntos;
- Resolver problemas através de conhecimento de conjuntos.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição das operações de números racionais vai precisar de 2 horas e meia.

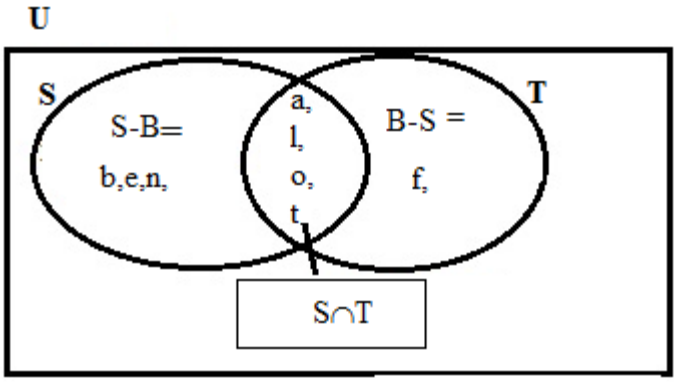
1.10.1. Resolução de problemas sobre teoria de conjuntos

Caro estudante, para darmos início a aula de resolução de problemas sobre teoria de conjuntos, considere os seguinte enunciados:

Caso 1

Na intersecção das letras dos seguintes conjuntos S= {a,b,e,n,o,t,a,l} e T= { f,l,a,o,t,a}, depois de colocadas em ordem alfabética, esconde-se uma nova marca de instrumentos musicais, de uma nova fábrica.

As letras que são comuns nos dois conjuntos a,o,t,l, neste caso traduzem a intersecção de S e T, que é $S \cap T$= { a,o,t,l}, colocando-as em ordem crescente formam a marca **alot**. Usando diagrama de Venn seria:



Caso 2

Numa vila que tem 7 000 habitantes existe dois clubes de futebol, A e B. Numa pesquisa feita com todos os habitantes, constatou-se que 1 200 pessoas não apreciam nenhum dos clubes, 1300 pessoas apreciam os dois clubes e 2 500 pessoas apreciam o clube A. Dai pergunta-se:

a) Quantas pessoas apreciam apenas o clube A?

b) Quantas pessoas apreciam o clube B?

c) Quantas pessoas apreciam apenas o clube B?

d) Faça um diagrama de Venn ilustrando toda situação acima.

Resolução

Primeiro extrair cuidadosamente os dados:

-Universo (U)= 7 000

-Nº de pessoas que não apreciam nenhum dos clubes = 1 200

-Nº de pessoas que apoiam os dois clube (A∩B)= 1300

-Nº de pessoas que apreciam o clube A=2 500

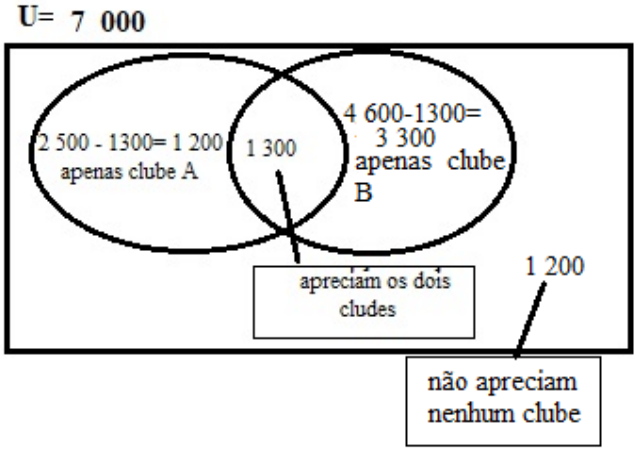
Feito isto, podemos iniciar a resolução

a) Neste caso, para achar o número de pessoas que apreciam apenas o clube A, se 2.500 pessoas apreciam o clube A e 1300 pessoas apreciam os dois clubes, então para obtermos os que apreciam apenas o clube A, é 2 500 - 1300= 1 200.

b) Agora, para acharmos o número de pessoas que apreciam o clube B, devemos antes de mais somar habitantes que apenas apreciam o clube B, os que não apreciam nenhum dos clubes, que é 1 200+1 200= 2 400. Tendo este somatório podemos já determinar o numero das pessoas que apreciam o clube B, 7 000- 2 400= 4 600.

c) Para determinar o número dos que apreciam apenas o clube B agora é fácil, basta subtrair do número dos que apreciam o clube B com o número dos que apreciam os dois clubes, 4 600-1300= 3 300.

d) Diagrama de Venn



ACTIVIDADES DA UNIDADE/ PREPARAÇÃO PARA O TESTE

Estimado estudante, visto que já esgotamos as lições da presente unidade de Teoria de Conjuntos, como forma de consolidar toda a matéria, resolva os exercícios que se seguem:

1. Com base nos seguintes conjuntos: Z={ 20,30,6,2 }, Y={ } ou Y= ∅e X = a, b, c, d, diga:

a) Elementos do conjunto Z?:_____;

b) Que nome se dá ao conjunto Y?: _____;

c) Qual é o conjunto que não obedece a estrutura de representação de conjuntos? _____;

d) Represente correctamente o conjunto estruturalmente mal escrito. _____.

2. Diga se é Falsa ou verdadeira cada alternativa abaixo: Sendo que: A = {a, b, c, d} é o conjunto, pode-se afirmar que:

a) a ⊂ A: _____
b) A∩A =∅: _____
c) {a, c} ∈A: _____
d) {a, c} ⊂ A: _____

3. Com base nos conjuntos que se seguem: A= {x| x é letra da palavra ramo};

B = {x| x é letra da palavra enfeite} e C = {x| x é letra da palavra atemorizado}

Obtenha os conjuntos:

i) $A \cap B$

ii) $B \cap C$

iii) $A \cap C$

4. Una os seguintes conjuntos:

i)D= {1,2,3} e E = { 20,30,6,2 };

ii) F= {valsa, jazz } e G = {marrabenta, rock}.

5. Ache a diferença ou o complementar dos conjuntos: A = {3, 6, 9}, B = {3, 5, 7, 9} e C = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, na seguinte ordem:

i) A – B;

ii) B – A;

iii) B – C;

iv) C_C^A = C – A.

6. Uma empresa tem um cofre que guarda as receitas diárias, cujo código para ser lembrado em caso de esquecimento, concordaram o seguinte segredo:
Intersecção dos conjuntos A = {6,1,5,2,4} e B= {1, 3,4, 6,7,8} em ordem decrescente, depois unir com as letras abcdef. Dai, foi solicitado para descobrir o código do cofre.

7. Numa pesquisa sobre a preferência em relação a duas marcas, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas lêem o jornal A, 180 lêem o jornal B e 60 lêem os jornais A e B.
Pergunta-se:

a) Quantas pessoas lêem apenas o jornal A?

b) Quantas pessoas lêem apenas o jornal B?

c) Quantas pessoas lêem jornais?

d) Quantas pessoas não lêem jornais?

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) 20,30,6,2; b) conjunto vazio c) X d) X = {a, b, c, d} ou {a; b; c; d}.

2. a) a $\subset$ A: Falso b) A$\cap$A = $\varnothing$: Falso c) {a, c} $\in$A:Verdadeiro d) {a, c} $\subset$ A: Falso

3. i) A $\cap$ B = { } ii) B $\cap$ C = {e, i, t} iii) A $\cap$ C = {r, a, m, o}

4. D$\cup$E=1,2,3, 20,30,6} nota: não importa a ordem, basta o novo conjunto conter todos os elementos dos dois conjuntos sem repetição.

F$\cup$G= {valsa, jazz, marrabenta, rock}

5. i) A – B= {6} ii) B – A = {5, 7} iii) B – C= { } iv) C_C^A= C – A={2, 4, 5, 7, 8};

6. Código é: **641abcdef;**

7. a) 190 b) 120 c) 370 d) 100

2 UNIDADE Nº2: EQUAÇÕES QUADRÁTICAS PARAMÉTRICAS SIMPLES

INTRODUÇÃO



Estimado(a) estudante(a) bem-vindo a segunda unidade desta classe, terminada a unidade temática da Teoria de Conjuntos, agora vamos iniciar a unidade temática de **Equações Quadráticas Paramétricas Simples**. Importa salientar que a resolução Equações Quadráticas Paramétricas assim como as biquadrática, está intimamente ligada com a resolução de equações quadráticas, por isso será importante recapitular a matéria da 9ª classe acerca de equações quadráticas para facilmente entendermos esta Unidade.

Esta unidade contem 4 (quatro) lições, estruturadas de seguinte modo:

Lição1: Definição de Equação Quadrática;

Lição2: Resolução de equações do tipo $ax^2 + bx + c=0$;

Lição3: Equações Quadráticas Paramétricas Simples;

Lição4: Resolução de Equações Quadráticas Paramétricas Simples.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir equações quadráticas paramétricas simples;
- Diferenciar uma equação paramétrica da não paramétrica;
- Resolver uma equação quadrática paramétrica simples.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre de **Equações Quadráticas Paramétricas Simples**, você:

- Definir equações quadráticas paramétricas simples;
- Diferencia uma equação paramétrica da não paramétrica;

- Resolve uma equação quadrática paramétrica simples.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática você vai precisar de 6 horas e 20 minutos

MATERIAIS BÁSICOS

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta unidade, você necessita de: uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

Lição nº1:
REVISÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS INCOMPLETAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Com certeza na 9ª classe estudou acerca de equações quadráticas, nesta lição de forma breve vamos de novo estudar acerca de equações quadráticas, pois vamos precisar bastante dos conhecimentos de equações quadráticas, para aplicar na resolução dos problemas de outras matérias, para caso concreto desta unidade: Equações Quadráticas Paramétricas Simples.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir equações quadráticas;
- Demonstrar as diversas formas de resolver alguns tipos de equações quadráticas.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **Revisão de Equações Quadráticas**, você vai precisar de 1 hora e 50 minutos.

2.1.1. Definição de Equação Quadrática

Uma equação do segundo grau na incógnita x é da forma: $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c} = 0$ onde os números reais **a, b e c** são os coeficientes da equação, sendo que **a** deve ser diferente de zero. Essa equação é também chamada de equação quadrática, pois o termo de maior grau está elevado ao quadrado.

Exemplos de equações quadráticas

a) $3x^2 - 4x + 1=0$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1

b) $x^2 -1=-2$, onde a = 1, b = 0 e c = 1

c) $2x^2 + 3x + 5=0$, onde a = 2, b = 3 e c = 5

d) $- x^2 + 8x=0$, onde a = -1, b = 8 e c = 0

e) $-4x^2=0$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

2.1.1.1 Resolução das equações quadráticas do tipo:

a) $ax^2+b=0$ (equação quadrática incompleta)

As equações quadráticas semelhantes a **$x^2-9=0$**, resolveremos assim:

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

Também podemos resolver a equação, factorizando o polinómio (x-3) (x+3)=0

Para que produto seja igual a zero um dos factores deve ser zero, teremos:
(x-3) = 0 Ú (t+3) =0 $\Leftrightarrow$x=3 Ú x= -3

Daí, o conjunto solução da equação é S = {-3, 3}.

b) $ax^2+bx=0$ (equação quadrática incompleta)

Para equações como **$x^2+6x=0$,** coloque em evidência o factor comum **x,** x (x+6) =0 (produto de factores igual a zero), é condição necessária que um deles seja igual a zero, matematicamente escreve-se: x =0 ou x + 6 = 0

x=0 ou x=-6

Temos duas soluções S = {0, 6}.

Lição nº2:
REVISÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS COMPLETAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Para terminar a recapitulação de equações quadráticas, nesta lição vamos lembrar como resolver equações do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c=0.}$



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver equações do tipo $ax^2 + bx + c=0$.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **Revisão de Equações Quadráticas**, você vai precisar de 1 hora e 50 minutos.

2.1.1. Resolução de equações do tipo $ax^2 + bx + c=0$.

A equação $\mathbf{ax^2 + bx + c=0}$ (quadrática completa)

Lembraremos agora como resolver as equações como:$x^2-5x+6 = 0$ usando a fórmula resolvente (Bhaskara).

1. Identificar os coeficientes: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

2. Escrever o descriminante $\Delta = b^2-4ac$.

3. Calcular $\Delta = (-5)^2-4.1.6$

$$\Delta = 25-24$$

$$\Delta = 1$$

4. Escreva a fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e substituía com valores dos coeficientes da equação e Δ.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$x = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = \frac{5-1}{2}$ ou $x_2 = \frac{5+1}{2}$

$x_1 = \frac{4}{2}$ ou $x_2 = \frac{6}{2}$

$x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

O caso $ax^2 + bx + c = 0$ pode também ser resolvido factorizando o trinómio do segundo grau segundo o método: $\mathbf{ax^2 + bx + c = a\,(x-x_1).\,(x-x_2).}$

Exemplo:

$x^2 + 5x + 6 = (x+2) \,.\, (x+3).$

$(x+2) \,.\, (x+3) = 0$

$x + 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$

Teremos duas soluções uma $x_{1=} -3$ e outra $x_{2=} - 2$.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que já terminou a aula de revisão de equações quadráticas, você pode resolver os exercícios abaixo:

1. Usando o discriminante e a fórmula resolvente, determine raízes de cada equação:

a) $x^2 + 9x + 8 = 0$

b) $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

c) $3x^2 + 18x - 21 = 0$

2. Use conhecimentos que tem sobre resolução de equações quadráticas, ache as raízes de seguintes equações.

a) $x^2 - 4x = 0$

b) $-x^2 - 4x - 3 = 0$

c) $x^2 - 8x = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) $x_{1=}$-8 $\vee$ $x_{2=}$ -1; b) $x_1 = -5 \vee x_2 = 3$ c) $x_1 = -7 \vee x_2 = 1$;

2. a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$; b) $x_1 = -3$ e $x_2 = -1$ c) $x_1 = 0$ e $x_2 = -8$;

d) $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

Lição nº3:
EQUAÇÕES QUADRÁTICAS PARAMÉTRICAS SIMPLES



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, assim que já recapitulamos acerca de equações quadráticas, agora vais estudar as Equações Quadráticas Paramétricas Simples.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Distinguir equações quadráticas paramétricas das demais equações;
- Identificar os coeficientes das equações.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição sobre **equações paramétricas simples**, vais precisar de 1 hora e 40 minutos.

2.3.1. Equações Quadráticas Paramétricas Simples

Definição

Quando a equação quadrática, para além da incógnita considerada (**x^2 e x)**, conter outra variável, denomina-se **equação quadrática paramétrica** e a outra variável diferente que contem denomina-se parâmetro.

Exemplos:

- $3x^2 + 6x + \mathbf{m}=0$
- $\mathbf{k}x^2 - \mathbf{k}x + 6 = 0$
- $x^2 - 5x + \mathbf{m}$.
- $2x^2 + (\mathbf{m} + 3)x + \mathbf{m} - 1$

Nota: Todas as letras nas equações acima alem de x^2 e x, são as que fazem delas equações quadráticas paramétrica.

Para resolver algumas equações quadráticas paramétricas, primeiro devemos identificar os seus coeficientes, certamente que estudou na 9ª classe, tomemos como exemplo $3x^2 + 6x + m$.

Os coeficientes são: a= 3, b=6 e c=m.

Outros exemplos:

- $3x^2 – 4kx + 1$, onde a = 3, b = - 4k e c = 1
- x^2 -mx, onde a = 1, b = m e c = 0
- $2x^2 + 5m$, onde a = 2, b = 0 e c = 5m



ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição, será muito proveitoso resolver os seguintes exercícios:

Estimado estudante, das alternativas que se seguem, copie apenas as que são equações quadráticas paramétricas e em seguida extraia os seus coeficientes.

a) $x^2 + 4x - k = 0$

b) $x^2 + 3x + 9 = 0$

c) $x^2 -5x +3m= 0$

d) $x^2 -5x+4= 0$

e) $2x^2 -2x +3=0$

f) $2tx^2 - tx-2 =0$

CHAVE DE CORRECÇÃO

Resposta: São equações quadráticas paramétricas as alternativas: a), c) e f.

Coeficientes a) a=1; b=4 e C=-k; c) a=1; b=-5 e c=3m f) a=2t; b=-t e c=-2.

Lição nº4:
RESOLVER UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA PARAMÉTRICA SIMPLES



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Assim que já consegue distinguir uma equação quadrática paramétrica de outros tipos de equações, nesta lição iremos resolver algumas Equações Quadráticas Paramétricas Simples.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Resolver equações quadráticas paramétricas simples.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **de Equações Quadráticas paramétricas simples**, você vai precisar de 2 horas.

Conteúdos

2.4.1. Resolução de Equações Quadráticas Paramétricas Simples

Para darmos inicio a resolução de equações quadráticas paramétricas simples, importa salientar que feita a identificação de coeficientes, usa-se o descriminante, expresso pela fórmula $\Delta = b_2 - 4ac$, representado pela letra grega Δ (delta) e as seguintes **condições** de acordo com o pedido de cada caso.

- $\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta > 0$ teremos duas soluções distintas;
- $\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta < 0$ não teremos soluções em IR;
- $\Delta = b^2 - 4ac$ se $\Delta = 0$ teremos duas soluções iguais ou raízes duplas.

Exemplos:

1. Para quais valores de **m** a equação $3x^2 + 6x + m = 0$ não admite nenhuma raiz real?

Resolução: Para que a equação não tenha raiz real devemos ter $\Delta<0$, como mostram as condições acima.

Coeficientes: a=3, b=6 e c = m

$b^2 - 4ac<0$

$6^2 – 4.3m <0$

$36 – 12m <0$

$– 12m <36$ devido ao sinal negativo, multiplicamos ambos os membros por -1

$12m >36$

$m>\frac{36}{12}$

$m> 3$

Solução: Logo, os valores de *m* devem ser maiores que 3 para que a equação não admita raiz real.

Exemplo 2:

Para quais valores de *k* a equação $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ admite raízes reais e desiguais? Para que a equação admita raízes reais e desiguais, devemos ter $\Delta >0$

Resolução: Coeficientes: a=1, b=-2 e c = k-2

$(-2)^2 – 4.1.(k-2)>0$

$4 – 4k+8 >0$

$– 4k+12 >0$ devido ao sinal negativo, multiplicamos ambos os membros por -1

$4k-12< 0$

$4k<12$

$k<\frac{12}{4}$

$k<3$

Solução: Logo, os valores de *k* devem ser menores que 3.ou seja representa tb por intervalos

Outro exemplo: Dada a equação, $3x^2 + 6x + m = 0$, resolva a equação dada de modo que m= 0.

Resolução:

$3x^2 + 6x + 0 = 0$

$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x\,(x + 2)=0 \quad \rightarrow \quad 3x=0$ e $x + 2=0$

$x=0$ e $x =-2$

ACTIVIDADES DA UNIDADE/ PREPARAÇÃO PARA O TESTE

Caro estudante, agora resolve os exercícios que se seguem sobre equações quadráticas paramétricas simples.

Exercícios

1. Dada a equação, $x^2 + 3x + k = 0$

a) Identifique os coeficientes da equação?

b) Resolva a equação dada quando k = 0?

c) Determine k de modo que a equação admita raízes reais iguais?

2. Determinar o valor de **m** de modo que a equação x^2 -5x +m=0, tenha duas soluções distintas.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. **a)** Os coeficientes da equação são: a=1, b=3 e c=k;

b) Quando k=0, as raízes são: $x_1 = 0$ $x_2 = -3$;

c)Para que a equação admita raízes reais iguais o $\Delta=0$.

b^2-4.a.c=0 $\rightarrow (3)^2$-4.1.k =0 $\rightarrow$9-4k=0 $\rightarrow$-4k=-9

k=$\frac{9}{4}$.

2. Neste caso Δ >0, são os coeficientes: a =1, b = -5 e c = m

b^2 - 4ac>0 $\rightarrow (-5)^2$-4.1.m>0 $\rightarrow$ 25-4m>0 $\rightarrow$ -4m>-25 $\rightarrow$ 4m<25

m<$\frac{25}{4}$

3 UNIDADE Nº3: EQUAÇÕES BIQUADRÁTICAS



INTRODUÇÃO

Bem-vindo a 3ª unidade temática de **Equações Biquadráticas,** é uma unidade também com uma forte ligação com equações quadráticas, requerendo apenas a sua dedicação. Esta unidade contêm lições que abordam acerca de: Identificação de equações biquadráticas, resolução de equações biquadrática simples. Está estruturada de seguinte modo:

Lição1: Equação Biquadrática;

Lição2: Resolução de Equação Biquadrática;

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar equações biquadráticas;
- Resolver equações biquadráticas simples.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Equações Biquadráticas**, você:

- Identifica equações biquadráticas;
- Resolve equações biquadráticas simples.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de Equações Biquadráticas, você vai precisar de 4 horas e 30 minutos.

Lição nº1:
EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, ao polinómio de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c=0$ chamamos a equação de equação quadrática, quando a equação possui um termo do 4º grau, outro do 2º grau e um termo independente chamamos equação biquadrática, que é uma equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c=0$, onde todos os coeficientes são números reais e **a** sempre diferente de 0 ($a\neq0$). Nesta primeira lição vamos definir equação biquadrática e identificar os seus coeficientes.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir equação biquadrática;
- Identificar os coeficientes das equações biquadráticas.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **Equação Biquadrática**, você vai precisar de 2 horas.

3.1.1. Equação Biquadráticas

Define-se equação biquadrática a equação incompleta do quarto grau, que após efectuadas todas as reduções possíveis, contém apenas termos onde a incógnita está submetida a expoentes de grau par.

Estimado estudante, as equações biquadráticas podem ser:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ essa é uma **equação biquadráticas completa**. Apresenta também os coeficiente a, b e c, que são números reais onde $a\neq0$.

$ax^4 + c = 0$ é uma **equação biquadrática incompleta**, ela só apresenta os coeficientes a e c.

$ax^4 + bx^2 = 0$ **equação biquadrática incompleta**, esta só apresenta os coeficientes a e b.

Exemplos de equações biquadráticas:

a) $x^4 - 15 = 1$ $\quad\quad$ a=1, b=0 e c=-16;

b) $x^4 - 64x^2 = 0$ $\quad\quad$ a=1, b=-64 e c=0;

c) $-20x^2 + x^4 + 64 = 0$ a=1, b=20 e c=64;

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ a=1, b=-5 e c=6.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, agora tenta resolver os exercícios que se seguem de identificação de equações biquadráticas.

1. Das alternativas que se seguem, Copie apenas as equações biquadráticas e em seguida extrai os coeficientes.

a) $X^4 - 18x^2 + 81 = 0$

b) $X^2 - 8x + 5 = 0$

c) $-5x^2 + x^4 + 6 = 0$

d) $2x^4 + x^3 + 6 = 0$

e) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

f) $x^4 - 9 = 7$

g) $x^3 - 10x = 7$

h) $x^4 - x + 64 = 0$

CHAVE DE CORRECÇÃO

São equações biquadráticas as alíneas e coeficientes respectivamente: a): a=1, b=-18 e c=81;

c): a=1, b=-5 e c= 6 e): a=1, b=-8 e c=16

Lição nº2:
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO BIQUADRÁTICA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Assim que já sabe identificar uma equação biquadrática e achar os seus coeficientes. Nesta lição vamos dar continuidade a resolução de equações biquadráticas. Salientar que o domínio de equações quadráticas é determinante para facilitar a compreensão da presente lição.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar tipos de Equações Biquadráticas;
- Resolver cada tipo de equação biquadrática.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **Resolução de equação biquadrática**, você vai precisar de 2 hora e 30 minutos.

3.2.1. Resolução de Equações Biquadráticas

Para se resolver uma equação biquadrática primeiro devemos escrever uma outra equação na forma de potência $(x^2)^2$ o termo x^4, em seguida substituir o $\mathbf{x^2}$ por uma outra incógnita, transformando desta forma a equação biquadrática em uma equação do 2° grau.

Exemplo 1:

Somos dado a equação biquadrática $x^4 - 16 = 0$, para resolver em R.

Primeiro vamos substituir x^4 por $(x^2)^2$ e a equação fica: $\mathbf{(x^2)}^2 - 16 = 0$

Agora consideremos $\mathbf{(x^2) = y}$, colocamos y, mas pode ser qualquer letra: $y^2 - 16 = 0$, veja que após substituição a equação transforma-se em uma do 2° grau.

($y^2 = 16$ o expoente 2 vira $\pm\sqrt{}$)

$y = \pm\sqrt{16}$ resolvendo a raiz

y = ± 4 caro estudante, lembre-se que no inicio da resolução chamamos **(x^2) = y,** então vamos substituir os valores de y que encontramos, para termos o valor de x.

Se y = 4 e se y = - 4

(x^2) = y **(x^2) = y**

$x^2 = 4$ $x_2 = -4$

$x \pm\sqrt{4}$ $x=\pm\sqrt{-4}$, não existe nos reais

x = ± 2

Logo, a solução = {-2, 2}

Exemplo 2:

Continuando, vamos juntos resolver a equação no conjunto dos números reais $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$

Vamos substituir x^4 por $(x2)^2$

(x^2)$^2 - 5x^2 + 6 = 0$ seja: $\mathbf{x^2 = y}$

$y^2 - 5y + 6 = 0$ Agora, temos uma equação quadrática completa, onde a = 1, b = - 5 e c = 6, dai vamos usar o descriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e a fórmula resolvente $y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, ficando:

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

Pela fórmula resolvente $y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ fica:

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$y = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$y_1 = \frac{5-1}{2}$ ou $y_2 = \frac{5+1}{2}$

$y_1 = \frac{4}{2}$ ou $y_2 = \frac{6}{2}$

$y_1 = 2$ ou $y_2 = 3$

Caro estudante, sempre que se tratar de equações biquadráticas, não se esqueça de que no inicio da resolução consideramos **(x2) = y,** então vamos substituir os valores de y que encontramos, para termos os valores de x.

Se y´ =2 e se y =3

(x2) = y **(x2) = y**

$x^2 = 2$ $x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{2}$ $x = \pm\sqrt{3}$

Logo a solução é: S= $\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3},\}$.

ACTIVIDADES DA UNIDADE/ PREPARAÇÃO PARA TESTE

Caro estudante para provar se percebeu a matéria de resolução de equações biquadráticas, cuidadosamente faça os exercícios indicados:

1. Identifique os coeficientes em cada uma das seguintes equações biquadráticas.

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 - 4 = 3x^2$

2. Resolva as seguintes equações biquadráticas em IR.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;

b) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$;

c) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) a=1, b=-8 e c=16;

b) a=1, b=-8 e c=-9;

c) a=1, b=-3 e c=-4;

2. a) S= {4, - 4, 2, - 2 };

b) S= {-2, 2};

c) S={ -3, -2, 2, 3}.

4 UNIDADE Nº4: FUNÇÃO QUADRÁTICA



INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA

Bem-vindo a unidade temática de **Função Quadrática,** será a quarta unidade a ser abordada. Esta unidade contem 6 (seis) lições, que abordam acerca de: identificação da função quadrática, assim como sua expressão analítica, representação gráfica das funções quadráticas, determinação do: domínio, contradomínio, zeros da função, vértices da parábola, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e equação do eixo da simetria; indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática, determinação de expressão analítica de função quadrática a partir do gráfico.

A presente unidade está Estruturada de seguinte modo:

Lição1: Definição de Função Quadrática e Estudo da Função $y= ax^2$

Lição2: Gráfico da Função do tipo $y= ax^2+c$

Lição3: Gráfico da Função $f(x)=a(x-p)^2$

Lição4: Função Quadrática do Tipo $(fx)= a(x-p)^2+q$

Lição5: Função Quadrática do Tipo $(fx)= ax^2 + b x + c$

Lição6: Determinação da expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar a função quadrática;
- Identificar a expressão analítica de uma função quadrática;
- Representar graficamente as funções quadráticas;
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, vértices da parábola, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e equação do eixo da simetria;
- Indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática;
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenadas;
- Determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria de uma parábola.
- Determinar a expressão analítica da função quadrática a partir do gráfico.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Função Quadrática**, você:

- Determina a expressão analítica de uma função quadrática;
- Determina os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo de coordenadas;
- Aplica estratégias diversificadas para estudar os diferentes tipos de funções quadráticas;
- Identifica elementos reais da vida que tenham características com a parábola.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática você vai precisar de 10 horas e 50 minutos.

MATERIAIS BÁSICOS:

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Régua ou esquadro.

Lição nº 1:
DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA E ESTUDO DA FUNÇÃO Y= AX²



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Diz-se que uma variável y é função de uma variável x quando a todo o valor determinado de x corresponde a um ou mais valores determinados de y, escrevendo-se y ou f(x); Na presente lição vamos abordar acerca da função quadrática do tipo $y= ax^2$.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir função quadrática;
- Representar graficamente a função **$y= ax^2$;**
- Fazer estudo completo da função **$y= ax^2$;**



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição função quadrática, vai precisar de 1 horas e 40 minutos.

4.1.1. Definição de Função Quadrática

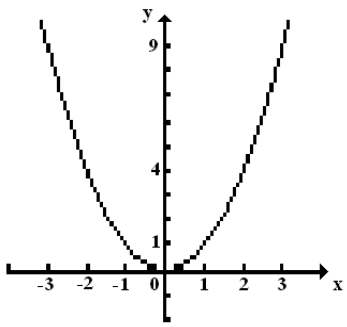
Uma função quadrática é uma função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c \quad , a \neq 0$ a, b e c são números reais.

- O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais;
- O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Alguns exemplos: $f(x) = -x^2 + 100x$; $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $h(x) = x^2 - 4$ e $i(x) = 17x^2$.

Lembra-se, do método de tabela para resolução de funções lineares e quadráticas. Recordemos resolvendo por meio da tabela a função $f(x)= ax^2$ e o respectivo gráfico (vide abaixo).

X	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

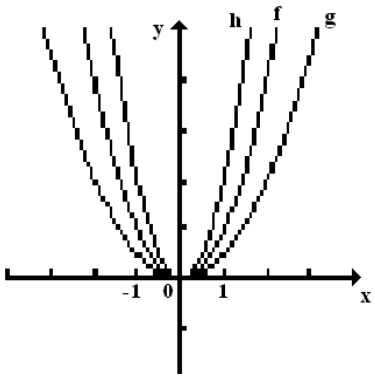


Vamos agora fazer o estudo do primeiro caso de funções quadráticas: $f(x)= ax^2$

(a) Consideremos as seguintes funções em que a>0:

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 0{,}5x^2$ $\quad h(x)=2x^2$

Vamos representar graficamente estas três funções:



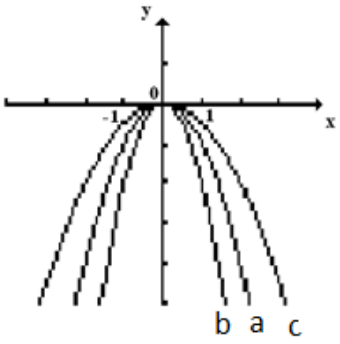
Conclusões:

Verificamos que nestas três funções o que varia é a abertura da parábola, mantendo-se todas as outras características. Então podemos concluir que quanto maior for o valor de a, mais fechada é parábola.

(b) Consideremos agora as funções em que a<0:

$a(x) = -x^2 \qquad b(x) = -0{,}5x^2 \qquad c(x) = -2x^2$

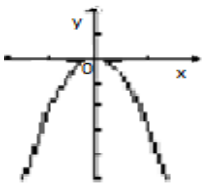
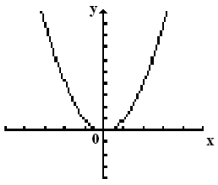
Voltemos novamente a representá-las geometricamente.



Conclusões:

Verificamos que o que varia nestas três funções é novamente a abertura da parábola, ou seja, quanto menor é o valor de a, mais fechada é a parábola. E ainda a parábola esta votada para

Registemos num quadro as principais características da função do tipo $y = ax^2 \ , a \neq 0$

	a<0  À medida que **a** diminui, a abertura também diminui	**a>0**  À medida que **a** aumenta, a abertura diminui
Concavidade	voltada para baixo	voltada para cima
Domínio	$\Re$	$\Re$
Contradomínio	$]-\infty,0] = \Re_0^-$	$[0,+\infty[= \Re_0^+$
Monotonia	crescente $\rightarrow]-\infty,0[$ decrescente $\rightarrow]0,+\infty[$	crescente $\rightarrow]0,+\infty[$ decrescente $\rightarrow]-\infty,0[$
Zeros da função	0	0
Extremos	máximo: 0	mínimo: 0
Vértice	(0,0)	(0,0)
Eixo de simetria	eixo OY de equação $x = 0$	eixo OY de equação $x = 0$

Sinal	negativo em todo $\Re$,\ {0}	Positivo em todo $\Re$,\ {0}

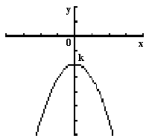
ACTIVIDADES DA LIÇÃO

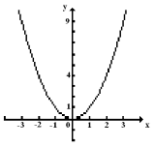
Caro estudante, assim que chegamos ao fim da aula de Função Quadrática, resolva os seguintes exercício:

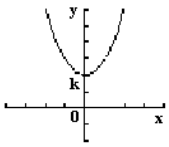
1: com base nos conhecimentos desta lição, esboce os gráficos das funções $c(x) = 3x^2$ e $d(x)= 5x^2$ e em seguida faça estudo completo de d(x).

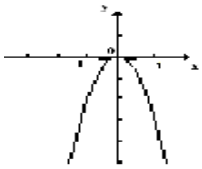
2: Dos gráficos abaixo, quais são os que são característicos da função $y= ax^2$?

a) b) c) d)



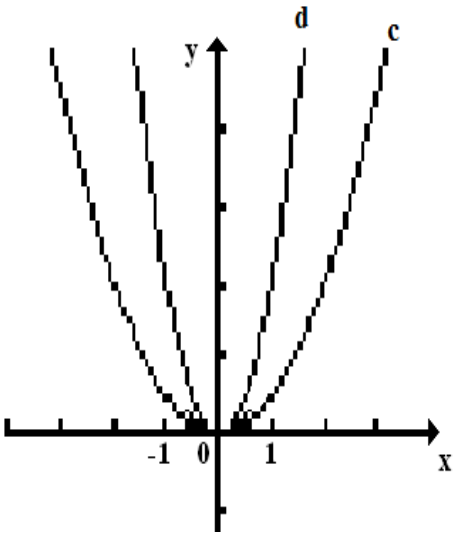






CHAVE DE CORRECÇÃO

1.



1. **Domínio:** $\Re$ (como já foi dito na definição);
2. **Contradomínio:** $[0,+\infty[$;
3. **Zeros da função:** x=0;
4. **Sinal da função:** d(x) é positivo em todo o seu domínio, diferente zero;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ d (x) é decrescente no intervalo $]-\infty,0[$

   $\rightarrow$ d (x) é crescente no intervalo $]0,+\infty[$;
6. **Extremos:** A função tem um mínimo em 0;
7. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=0;
8. **Vértice da parábola:** (0,0);
9. **Concavidade:** Voltada para cima.

1. os gráficos das funções do tipo $y= ax^2$ são as alíneas b e d.

Lição nº2:
GRÁFICO DA FUNÇÃO DO TIPO Y= AX^2+C

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, dando continuidade com estudo da função quadrática, na presente lição vamos falar da função do tipo y= ax^2+c, com certeza ainda se lembra da Função do tipo y= ax^2.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Representar graficamente a função **y= ax^2+c;**
- Fazer estudo completo da função **y= ax^2+c.**

TEMPO DE ESTUDO:

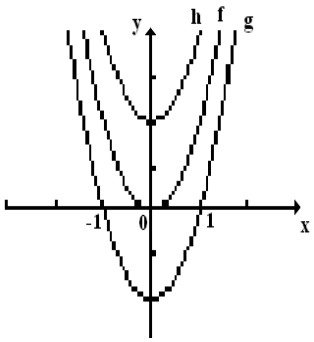
Caro estudante, para estudar a lição da função do tipo y= ax^2+c, vai precisar de 1 horas e 50 minutos.

4.2.1. Caso: Gráfico da Função f(x)= ax^2+c, a≠0

Consideremos as funções:

$f(x) = 2x^2$ $\quad$ $g(x) = 2x^2 - 2$ $\quad$ $h(x) = 2x^2 + 2$

Geometricamente temos:



Conclusões:

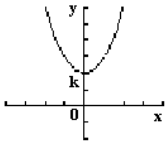
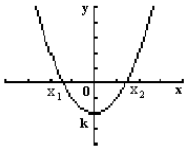
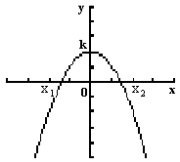
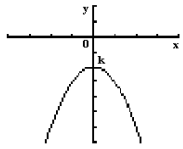
- A abertura das parábolas é a mesma, assim como a concavidade (**a** é o mesmo);
- Houve uma translação vertical nas funções h(x) e g(x) em relação a f (x);
- A função g(x) sofreu uma translação associada ao ponto (0,-2);
- A função h(x) sofreu uma translação associada ao ponto (0,2);
- Os vértices vão passar a ser: - em $h(x) \rightarrow (0,2)$ - em $g(x) \rightarrow (0,-2)$;
- Os eixos de simetria são os mesmos, ou seja, a recta $x = 0$;
- Os extremos vão mudar: - em g(x) temos um mínimo $\rightarrow$-2;

  - em h(x) temos um mínimo $\rightarrow 2$;
- O contradomínio também vai sofrer alterações: - $D'_g = [-2,+\infty[$;

  - $D'_h = [2,+\infty[$;
- Zeros da função: dependendo do caso poderemos ter 0, 1 ou 2 zeros:

  g(x): x_1=-1 e x_2=1;

  h (x) não tem zeros.

	$a>0 \wedge k>0$	$a>0 \wedge k<0$	$a<0 \wedge k>0$	$a<0 \wedge k<0$
				
Concavi-Dade	voltada para cima	voltada para cima	voltada para baixo	voltada para baixo
Domínio	$\Re$	$\Re$	$\Re$	$\Re$
Contra-domínio	$[k,+\infty[$	$[k,+\infty[$	$]-\infty,k]$	$]-\infty,k]$
Monotonia	decrescente: $]-\infty,0[$ crescente: $]0,+\infty[$	decrescente: $]-\infty,0[$ crescente: $]0,+\infty[$	decrescente: $]0,+\infty[$ crescente: $]-\infty,0[$	decrescente: $]0,+\infty[$ crescente: $]-\infty,0[$
Zeros da função	não tem	x_1 e x_2	x_1 e x_2	não tem
Extremos	mínimo: k	mínimo: k	máximo: k	máximo: k
Vértice	(0,k)	(0,k)	(0,k)	(0,k)
Eixo de simetria	eixo OY de equação $x=0$	eixo OY de equação $x=0$	eixo OY de equação $x=0$	eixo OY de equação $x=0$
Sinal	positiva em $\Re$	positiva: $]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[$ negativa: $]x_1,x_2[$	positiva: $]x_1,x_2[$ negativa: $]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty$	negativa em $\Re$

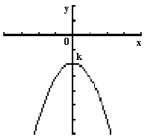
ACTIVIDADES DA LIÇÃO

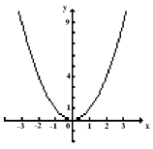
Caro estudante, agora tenta resolver os exercícios que se seguem de função quadrática do tipo $y= ax^2 + c$.

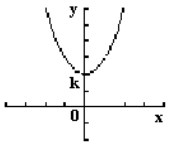
1. Com base nos conhecimentos desta lição, esboce no mesmo Sistema Cartesiano Ortogonal (S.C.O.) as funções $m(x) = 3x^2+3$ e $n(x)= 3x^2-3$, partindo da função $f(x)= 3x^2$, em seguida faça estudo completo de m(x).

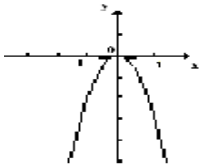
2. Dos gráficos abaixo, quais são os que são característicos da função $y= ax^2 + c$?

a) b) c) d)



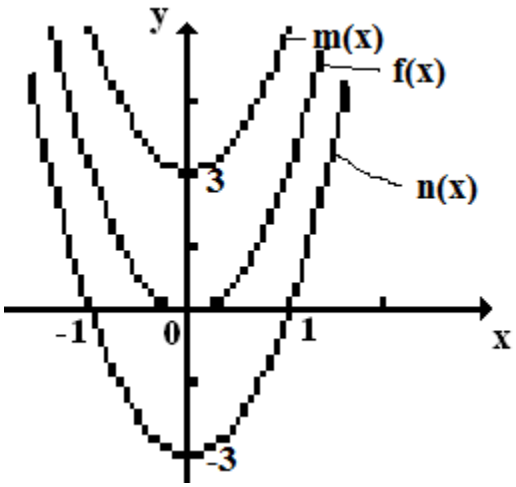






CHAVE DE CORRECÇÃO

1: geometricamente temos



Estudo completo de m(x)

1. **Domínio:** R;
2. **Contradomínio:** $[3,+\infty[$;
3. **Zeros da função:** não tem;
4. **Sinal da função:** m (x) é positiva em todo o seu domínio, ou seja, em $\Re$;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ m (x) é decrescente no intervalo $]-\infty,0[$;

   $\rightarrow$ m (x) é crescente no intervalo $]0,+\infty[$;
6. **Extremos:** A função tem um mínimo em 3;
7. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=0;
8. **Vértice da parábola:** (0,3);
9. **Concavidade:** Voltada para cima.

Lição nº 3:
GRÁFICO DA FUNÇÃO F(X)=A(X-P)^2

INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Nos tipos das funções anteriores destacamos que o coeficiente a influência na abertura do gráfico, assim como na posição da parábola. O coeficiente c dita a translação do gráfico verticalmente. Na presente lição vamos estudar acerca de função quadrática do tipo f(x)=a(x-p)^2, que influencias traz o termo **p** para este tipo de funções.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Representar graficamente a função do tipo f(x)=a(x-p)^2;
- Fazer estudo completo da função do tipo f(x)=a(x-p)^2.

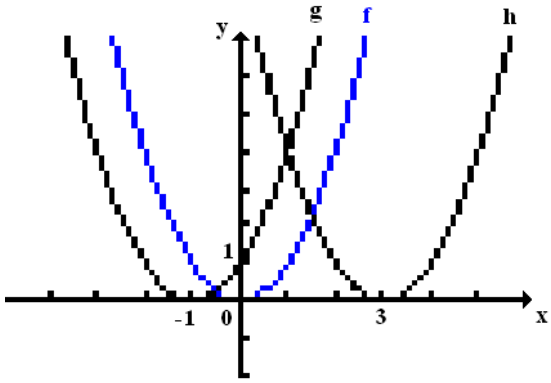
TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Gráfico da Função f(x)=a(x-p)^2,** vai precisar de 2 horas.

4.3.1. Gráfico da Função f(x)=a(x-p)^2

A partir do gráfico da função $f(x) = x^2$, vamos construir os gráficos das seguintes funções:

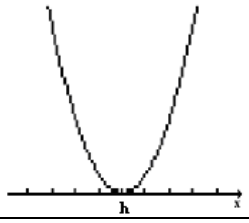
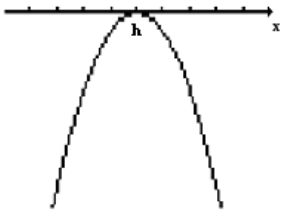
$g(x) = (x+1)^2$ $\qquad$ $h(x) = (x-3)^2$



Conclusões:

Obtivemos os gráficos das funções g e h através de uma translação horizontal, à esquerda ao longo do eixo x no valor **p** se **p** for um número positivo, e à direita se **p** for um número negativo. Vamos ter alterações nos zeros, nas coordenadas do vértice, no eixo de simetria e na monotonia.

Sintetizando:

	a>0	a<0
		
Concavidade	voltada para cima	voltada para baixo
Domínio	$\Re$	$\Re$
Contradomínio	$\Re_0^+$	$\Re_0^-$
Monotonia	decrescente: $]-\infty,h[$ crescente: $]h,+\infty[$	decrescente: $]h,+\infty[$ crescente: $]-\infty,h[$
Zeros	H	H
Extremos	mínimo: 0	máximo: 0
Vértice	(h,0)	(h,0)
Eixo de simetria	recta de equação $x = h$	recta de equação $x = h$
Sinal	positiva em $\Re$, $\setminus\{h\}$	negativa em $\Re$, $\setminus\{h\}$

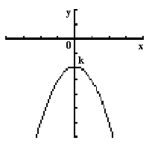
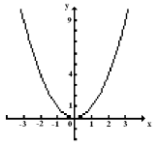
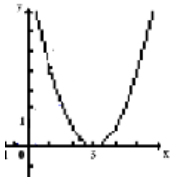
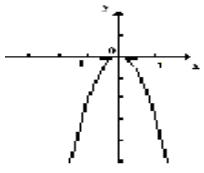
Actividades da Lição

Caro estudante para provar se percebeu a matéria de funções do tipo y= **$a(x-p)^2$**, faça cuidadosamente os seguintes exercícios:

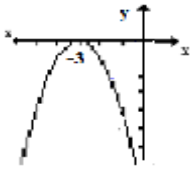
1. Com base nos conhecimentos adquiridos, esboce no mesmo Sistema Cartesiano Ortogonal (S.C.O.) as funções $t(x) = (x+2)^2$ e $z(x)= (x-4)^2$, partindo da função $f(x)= x^2$, em seguida faça estudo completo de t(x).

2. Dos gráficos abaixo, quais são os que são característicos da função $y= (ax + p)^2$?

a) b) c) d)

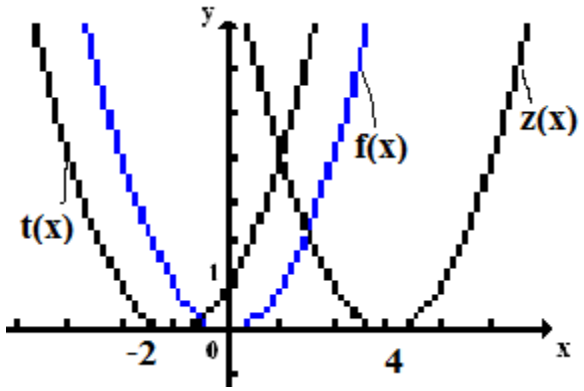





e)



CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Geometricamente temos



Para t (x) temos:

1. **Domínio:** R;
2. **Contradomínio:** $[0,+\infty[$;
3. **Zeros:** x_1 e x_2=-2
4. **Sinal da função:** t (x) é positivo em todo $\Re$, diferente de -2;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$t (x) é decrescente no intervalo $]-\infty,-2[$

   $\rightarrow$ t (x) é crescente no intervalo $]-2,+\infty[$;
6. **Extremos:** A função tem um mínimo em 0;
7. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=-2;
8. **Vértice da parábola:** (-2,0);
9. **Concavidade:** Voltada para cima.

Exercício 2: As função $y= ax^2+p$ são as alíneas **c)** e **e).**

Lição nº 4:
FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO (FX)= A(X-P)^2+Q

INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Caro estudante, iremos aprender um novo tipo de função quadrática, salientar que o domínio de outros tipos de função aprendidos será importante nesta lição. Na presente lição iremos aprender acerca de Função Quadrática do Tipo (fx)= a(x-p)^2+q, com objectivo de esboçar o gráfico e fazer estudo completo.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Representar graficamente a função do tipo f(x)=a(x-p)^2+q;
- Fazer estudo completo da função do tipo f(x)=a(x-p)^2+q.

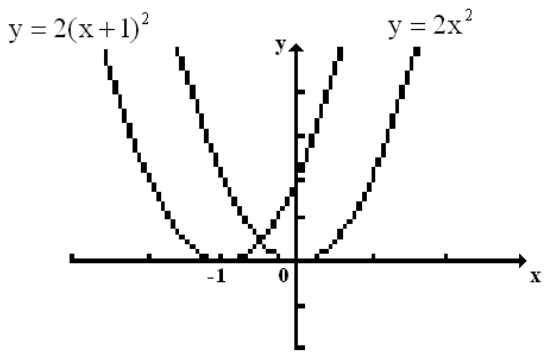
TEMPO DE ESTUDO:

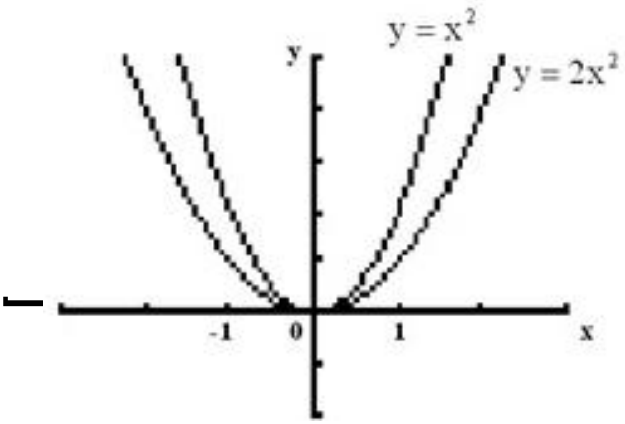
Caro estudante, para estudar a lição da função do tipo f(x)=a(x-p)^2+q, vai precisar de 1 horas e 20 minutos.

4.4.1. Gráfico da função (fx)= a(x-p)^2+q

Para iniciar o estudo deste tipo de função, consideremos a função $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

Que transformações devem ser feitas ao gráfico da função $g(x) = x^2$ para obter o gráfico da função f (x)?



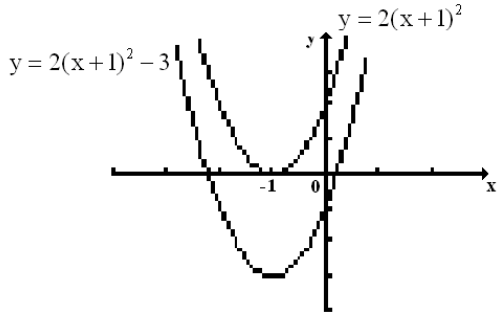


1º) Passar de $y = x^2$ para $y = 2x^2$;

2º) Passar de $y = 2x^2$ para $y = 2(x+1)^2$:

Vamos deslocar o gráfico segundo uma translação associada ao ponto (-1, 0).

3º) Passar de $y = 2(x+1)^2$ para $y = 2(x+1)^2 - 3$:



Vamos deslocar o gráfico segundo uma translação associada ao ponto (-1, -3).

Conclusões: Obtemos o gráfico de f(x) através de uma translação do gráfico da função $y = 2x^2$, associada ao ponto (-1,-3).

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição, será muito proveitoso resolver os seguintes exercícios:

1. Sem efectuar cálculos faz um possível esboço do gráfico da seguinte função: $f(x)=5(x+3)^2$

2. Sem efectuar cálculos faz um possível esboço do gráfico de cada uma das funções:

a) $a(x)=x^2+\frac{5}{2}$ b) $l(x)=3x^2-4$ c) $p(x)=-(x-3)^2$

e em seguida faça estudo completo da função $p(x)=-(x-3)^2$.

Chave de Correcção

1.

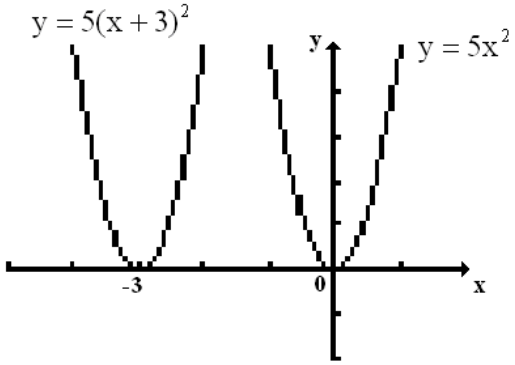
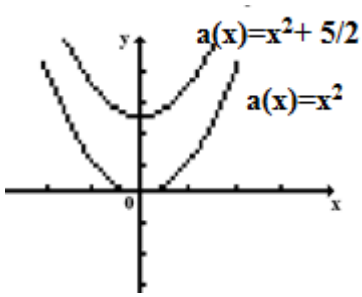


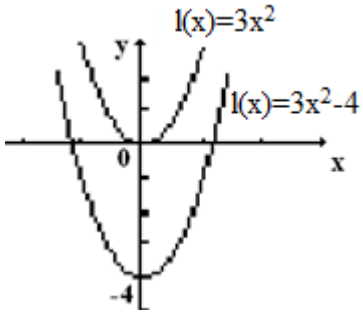
Figura 33

2.

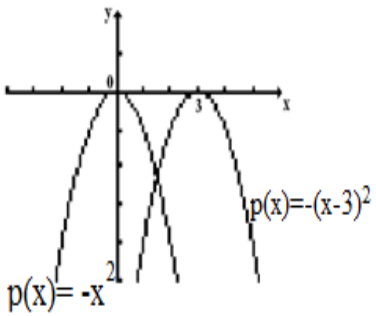
a)



b)



c)



Para p (x) temos:

1. **Domínio:** R;
2. **Contradomínio:** $]-\infty,0]$
3. **Zeros:** x=3
4. **Sinal da função:** p (x) é negativo em todo $\Re$,diferente de 3;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$p (x) é crescente no intervalo $]-\infty,3[$

   $\rightarrow$ p (x) é decrescente no intervalo $]3,+\infty[$;
6. **Extremos:** A função tem um máximo em 0;
7. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=3;
8. **Vértice da parábola:** (3,0);
9. **Concavidade:** Voltada para baixo.

Lição nº 5:
FUNÇÃO QUADRÁTICA DO TIPO (FX)= $AX^2 + B X + C$



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, vamos aprender um novo tipo de função quadrática, salientar que o domínio de outros tipos de funções aprendidos será importante nesta lição também. Na presente lição vamos aprender acerca de Função Quadrática do Tipo $y=ax^2 + b\ x + c$, com objectivo de esboçar o gráfico e fazer estudo completo.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Representar graficamente a função do tipo $y=ax^2 + b\ x + c$;
- Fazer estudo completo da função do tipo $y=ax^2 + b\ x + c$



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Função Quadrática do Tipo $y= ax^2 + b\ x + c$, vai precisar de 2 horas.

4.5.1. Função Quadrática do Tipo $y= ax^2 + b\ x + c$

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem construir a tabela de pares ordenados (x, y), mas seguindo apenas os passos:

1. O valor do coeficiente **a** define a concavidade da parábola;
2. Os zeros da função definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x;
3. O vértice V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se a > 0), ou máximo (se a< 0). A recta paralela ao eixo dos y, que passa por V (x_v e y_v) é o eixo de simetria da parábola;
4. **Para x = 0** (ordenada na origem), temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

Exemplo: Consideremos a função definida por $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$.

1. A função representa uma parábola de concavidade voltada para baixo $(a = -4, a \angle 0)$.

2. **Os Zeros da função:** a=-4, b=4 e c=5

$\Delta = (4)^2 - 4.(-4).5$

$\Delta = 16 + 80$

$\Delta = 96$

Pela fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, obtemos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{96}}{2.(-4)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 9.8}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-4-9.8}{-8} \qquad x_2 = \frac{-4+9.8}{-8}$$

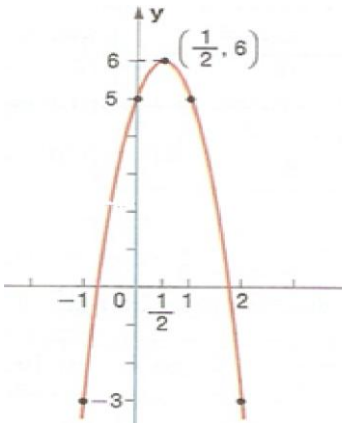
$x_1 = 1.7$ $\qquad$ $x_2 = 0.72$

3. **O vértice V**

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(16+80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$$

V = (1/2, 6)



4. **Ordenada na origem:**

Para x = 0

$-4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5$

P (0,5).

Por fim identificamos os pontos para esboçar o gráfico: →

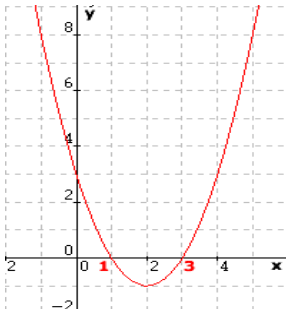
ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, agora tenta resolver o exercício que se segue:

1. Considere a função definida por f(x) = x²-4x+3 Com base nos conhecimentos adquiridos esboce o gráfico e faça o estudo completo.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. $a > 0 =$ parabola virada para cima



zeros da função: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

V: (2,1)

P(0,3) vide o gráfico ao lado

Para f (x) temos:

1. **Domínio:** $\Re$;
2. **Contradomínio:** $[-1, +\infty[$
3. **Zeros da função:** $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$
4. **Sinal da função:** f (x) é positivo $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$;

   Negativo $]1,3[$;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ f (x) é decrescente no intervalo $]-\infty,2[$;

   $\rightarrow$ f (x) é crescente no intervalo $]2,+\infty[$;
6. **Extremos:** A função tem um mínimo em -1;
7. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=2;
8. **Vértice da parábola:** (2,-1);

5. **Parábola:** Voltada para cima.

Lição nº 6:
DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA A PARTIR DO GRÁFICO



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Caro estudante, nas aulas passadas aprendeu acerca de representação gráfica de vários tipos de funções quadráticas, da mesma maneira que representamos os gráficos através das expressões analíticas, também é possível a partir do gráfico determinar a expressão analítica de função. Nesta lição vamos aprender como Determinar a expressão analítica de uma função quadrática.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar as fórmulas para a determinação de expressão analítica;
- Determinar expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de determinação da expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico vai precisar de 2 horas.

4.6.1. Determinação da expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico

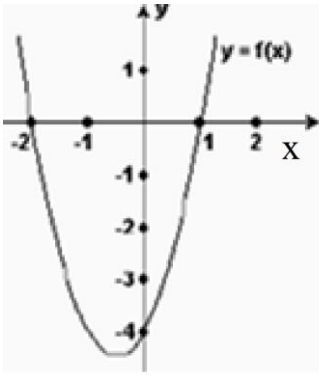
A partir do gráfico (parábola) é possível determinar a expressão analítica da função que originou a parábola, basta fazer a leitura do gráfico baseando-se nos elementos fornecidos.

Você precisa fazer a leitura do gráfico se tem patente: ordenada na origem, zeros da função e coordenadas do vértice da parábola.

A seguir irá aplicar os dados obtidos na fórmula geral do 2º grau: $f(x)=ax^2$ bx+c equivalente a **$f(x)= a(x-x_1).(x-x_2)$,** mas usamos esta formula quando temos os zeros da função e a ordenada na origem (x=0), ou então usamos a formula $(x-p)^2+q$, quando o gráfico nos fornece x_v e y_v (coordenadas do vértice), e o P(x,y) quando x=0.

Há casos em que o gráfico fornece dados que nos permitem escolher a fórmula que preferimos usar para determinar a expressão analítica.

Exemplo 1: Determine a expressão analítica da seguinte função Quadrática?



Como vê:

os zeros da função são: x_1=-2 e x_2=1

As coordenadas de um ponto da parábola (0,-4)

Este dados são suficientes para determinar a expressão analítica, Vejamos:

1º efectuamos o seguinte cálculo para determinar o valor de **a:**

$f(x)= a(x-x_1).(x-x_2)$

$-4= a(0+2).(0-1)$

$-4=-2a$

$a=2$

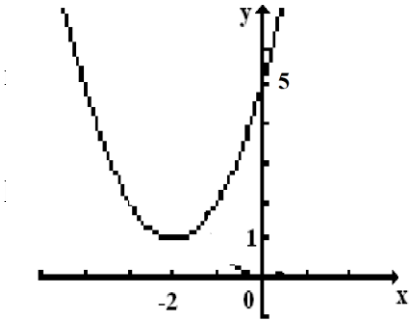
2º $f(x)= a(x-x_1).(x-x_2)$

$f(x)= 2(x+2).(x-1)$

$\mathbf{f(x)= 2x^2+2x-4}$

Logo a expressão analítica do gráfico acima é $f(x)= 2x^2+2x-4$

Exemplo 2: Determine a expressão analítica do gráfico da função Quadrática?



Veja caro estudante, que neste caso não temos raízes por isso para determinar a expressão analítica só ecorrer a Xv e Yv, e o P(x,y) quando x=0.

Vamos extrair os dados: Xv=-2 e Yv=1 e P(0,5)

$5= a(0+2)^2+1$

$5=4a+1$

$4a=5-1$

$a=4/4$

$a=1$

2º: $y=a\ (x-p)^2+q$

$y=1\ (x+2)^2+1$

$y=x^2+2x2x+4+1$

$\mathbf{y= x^2+4x+5}$

A expressão analítica do gráfico é $\mathbf{y= x^2+4x+5}$

ACTIVIDADES DA UNIDADE/ PREPARAÇÃO PARA O TESTE

1. Quais das funções abaixo são do 2º grau?

i) a(x)= x – 5x + 6

ii) b(x)= x^2 - 7x + 10

iii) c(x)= 0x^2 + 4x – 3

iv) d(x)= 2x^3 - 8x^2 - 2

v) e(x)= 4x^2 - 1

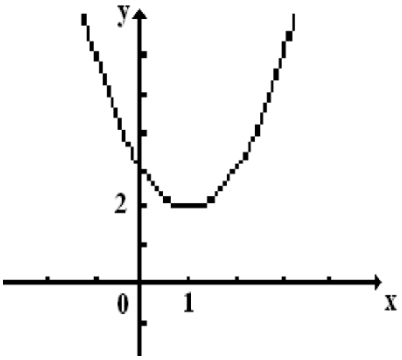
vi) g(x)= x^2 - 7x

2. Considere a função definida por f(x) = $x^2 - 9$, com base nos conhecimentos adquiridos esboce o gráfico e faça estudo completo?

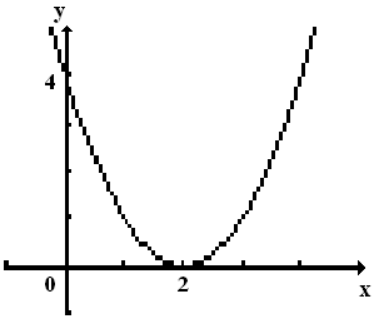
3. Considere a função definida por $g(x) = -x^2 + 5x + 6$ com base nos conhecimentos adquiridos esboce o gráfico?

4. Escreve a expressão analítica de cada função quadrática representada graficamente.

a)



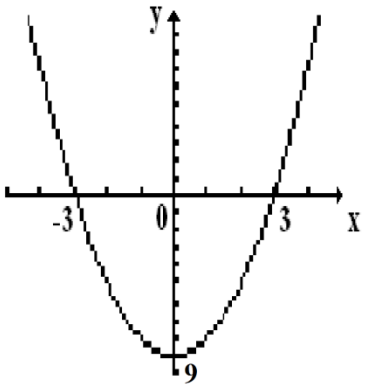
b)



CHAVE DE CORRECÇÃO

1: Apenas alíneas: ii) vi) e v).

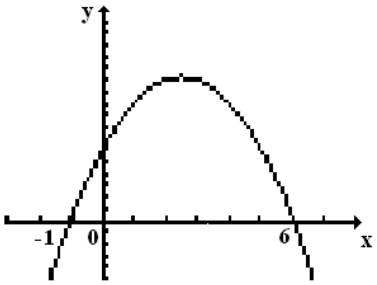
2. f(x) = $x^2 - 9$,



Estudo completo de f(x)

1. **Domínio:** R;
2. **Contradomínio:** $[-9,+\infty[$;
3. **Zeros:** x_1=-3 e x_2=3;
4. **Sinal da função:** f (x) é positiva de $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$;
   e é negativa de $]-3,3[$
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ f (x) é decrescente no intervalo $]-\infty,0[$
6. $\rightarrow$ f (x) é crescente no intervalo $]0,+\infty[$;
7. **Extremos:** A função tem um mínimo em -9;
8. **Eixo de simetria:** O eixo de simetria é x=0;
9. **Vértice da parábola:** (0,-9);
10. **Concavidade:** Voltada para cima.

3. $g(x) = -x^2 + 5x + 6$



4. a) x^2-2x+3 b) a) x^2-4x+4

5 UNIDADE Nº5: INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

INTRODUÇÃO

Bem-vindo a unidade temática nº 5, de **Inequações Quadráticas**. Desde o inicio dos estudos da 10 classe, abordamos vários aspectos ligados a polinómios do segundo grau até chegarmos a esta unidade, onde vamos abordar acerca de inequações Quadráticas. Falaremos de: identificação de inequações quadráticas, resolução gráfica e analítica de uma inequação quadrática e de resolução de problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.



Esta unidade contem 3 (três) lições e está estruturada de seguinte modo:

Lição1: Identificação e Resolução Gráfica de inequações Quadráticas
Lição2: Resolução Analítico de Inequações Quadráticas

Lição3: Resolução de Problemas Práticos que Envolvem Funções e inequações Quadráticas

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar inequações quadráticas;
- Resolver gráfica e analiticamente uma Inequação quadrática;
- Resolver problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre Inequações Quadráticas, você:

- Identifica inequações quadráticas;
- Resolve gráfica e analiticamente uma Inequação quadrática;
- Resolve problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática, você vai precisar de 6 horas.

MATERIAIS BÁSICOS:

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Régua ou esquadro.

Lição nº 1:
IDENTIFICAÇÃO E RESOLUÇÃO GRÁFICA DE INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

A desigualdade condicional entre duas quantidades e dependente de certas variáveis designa-se **Inequação**. Nesta lição precisamente abordaremos acerca das inequações quadráticas, caro estudante, os conhecimentos adquiridos acerca de equações e funções quadráticas serão bastante necessários, por isso se não se lembra, queira fazer revisão. Para fácil e melhor compreensão desta lição.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar inequações quadráticas;
- Resolver graficamente as inequações quadráticas;



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Identificação e Resolução Gráfica de inequações Quadráticas vai precisar de 2 horas.

5.1.1. Identificação e Resolução Gráfica de inequações Quadráticas

É importante Saber que a diferença entre equações e inequações é apenas o sinal que liga os dois membros, de **igualdade** para as equações e **desigualdade** para as inequações.

As inequações quadráticas são expressas $ax^2 + bx + c < 0$, sendo **a, b** e **c** números reais e $a \neq 0$

Exemplos de inequações Quadráticas

a) $t^2 - 35t + 159 > 0$; b) $x^2 - 4x \leq 0$; c) $2x^2 + 3x - 5 > -3$;

d) $9 - x^2 > 0$; e) $3x^2 - 4x + 1 > 0$; f) $-4x^2 \leq 0$

Resolução de inequações quadráticas

- È recomendável sempre que ax^2 for negativo multiplicar ou dividir a inequação por um número negativo e consequentemente o sinal da desigualdade mudará.
- Existem dois métodos para resolver uma inequação quadrática: **método analítico ou método gráfico**
- Ao conjunto de todos elementos do universo que transformam a inequação numa proposição verdadeira chama-se **conjunto solução ou solução da inequação.**

1. Método gráfico

A simples interpretação do gráfico da função quadrática permite reconhecer propriedades que simplificam muito a resolução de determinadas inequações, ora vejamos:

Exemplo 1:

É dada a função $a(x) = -2x^2 - 4x + 38$, determine o conjunto solução da condição $a(x) < 8$.

Podemos dividir a resolução deste tipo de questões nos seguintes passos:

1º passo: Escrever a condição e passar todos os termos para o 1º membro da inequação:

$$\mathbf{a}(x) < 8 \Rightarrow -2x^2 - 4x + 38 < 8$$
$$\Rightarrow -2x^2 - 4x + 38 - 8 < 0$$
$$\Rightarrow -2x^2 - 4x + 30 < 0$$

2º passo: Determinar as raízes (zeros).

Aplicando a Fórmula Resolvente à expressão $-2x^2 - 4x + 30 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-2)(30)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{4+16}{-4} \text{ ou } x = \frac{4-16}{-4}$$

$\Leftrightarrow x_1 = -5 \vee x_2 = 3$

Factorizando:

$-2x^2 - 4x + 30 = \mathbf{-2\,(x + 5)\,(x - 3)}$

3º passo: Fazer o esboço da função: $\rightarrow$

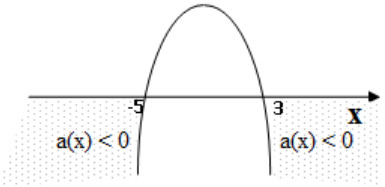


Figura 45

- A parábola é voltada para baixo, pois o coeficiente de "x^2" é negativo (a= –2);
- A parábola corta o eixo dos xx' nas abcissas "– 5 " e "3" (raízes da expressão).

4º passo: Saber o que se pretende:

a(x) < 8 $\Rightarrow$ –2x^2 – 4x + 30 < 0

5º passo: **Escrever o conjunto solução.**

a(x) < 8 $\Rightarrow$ x $\in$] – ∞ , -5[$\cup$] 3 , + ∞ [

Exemplo 2: Dado as funções a(x) = 4x^2 + 18 x – 19 e **b**(x) = x^2 + 2

Determine o conjunto solução da condição a(x) ≥ b(x)

Resolução:

Seguindo os passos descritos no exemplo anterior

1º passo: Escrever a condição e passar todos os termos para o 1º membro da inequação:

a(x) ≥ b(x) $\Rightarrow$ 4x^2 + 18 x – 19≥ x^2 + 2

$\Rightarrow$ 4x^2 – x^2 + 18 x –19 – 2 ≥ 0

$\Rightarrow$ 3x^2 + 18 x – 21 ≥ 0

2º passo: Determinar as raízes (zeros).

"3x^2 + 18 x – 21"…

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4 \times 3 \times (-21)}}{2(3)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{6} \quad \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 24}{6}$$

$\Leftrightarrow$x = –7 $\vee$ x = 1

Factorizando:

3x^2 + 18 x – 21 = **3 (x + 7) (x – 1)**

3º passo: Fazer o esboço da função:

- A parábola é aberta para cima, pois o coeficiente de "x^2" é positivo (a= 3);
- A parábola corta o eixo dos xx' nas abcissas "– 7 " e "1" (raízes da expressão**).**

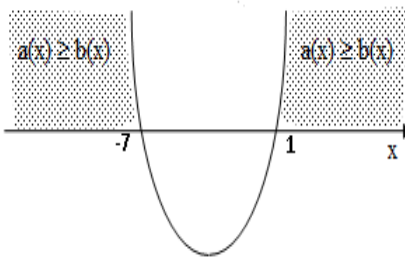


Figura 46

4º passo: Saber o que se pretende:

a(x) ≥ b(x), $\Rightarrow$ 3x^2 + 18 x – 21 ≥ 0

5º passo: **Escrever o conjunto solução.**

a(x) ≥ b(x) $\Rightarrow$ x $\in$] – ∞ , -7] $\cup$ [1 , + ∞ [

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição, será muito proveitoso resolver os seguintes exercícios:

1. Copie apenas alternativas que são inequações quadráticas?

a) $x - 5x + 6 > 2$
b) $2x^3 - 8x^2 - 2 < 0$
c) $x^2 - 7x + 10 > 0$
d) $4x^2 - 1 < 0$
e) $0x^2 + 4x - 3 = 0$
f) $x^2 - 7x > 0$

2. Usando o método gráfico determine o conjunto de soluções das seguintes inequações:

a) $x^2 + x > 0$

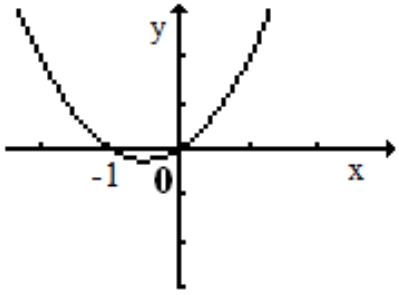
b) $x^2 + 2x + 8 \leq 0$

c) $x^2 + x - 2 > 0$

CHAVE DE CORRECÇÃO

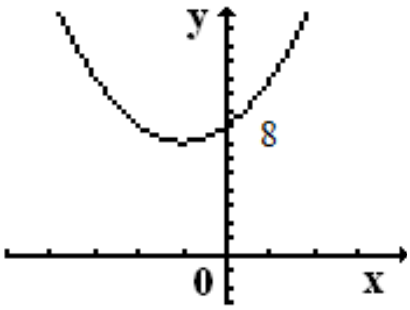
1.c), d) e f)

2. a) $x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1$



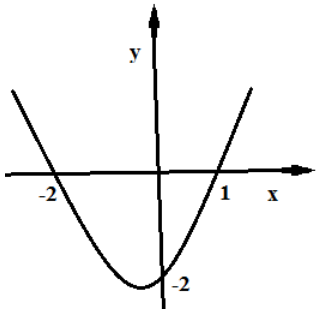
Então $D =]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$

b) $x^2 + 2x + 8 \leq 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-28}}{2}$



Impossível em $\Re$, porque discriminante é menor que zeros ($\Delta<0$).

c) $x^2 + x - 2 > 0$



$x \in R\ ]-\infty,-2[\cup]1, +\infty[$.

Lição nº2:
Resolução Analítica de Inequações Quadráticas



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Na aula anterior introduzimos a resolução de inequações quadráticas usando o método gráfico, no entanto nesta lição vamos dar continuidade abordando o método analítico para resolução de inequações quadráticas.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver Analiticamente as Inequações Quadráticas;



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Definição de Conjuntos** vai precisar de 2 hora.

5.2.1. Resolução Analítico de Inequações Quadráticas

A resolução de inequações quadráticas também pode ser feita aplicando o método analítico, com a utilização de quadro de sinais, que pode ter varias formas de acordo com cada caso. Para o preenchimento do quadro temos que em primeiro lugar, determinar os zeros da função.

Exemplo 1:

Resolva a seguinte inequação quadrática $-x^2 -4x - 3 \geq 0$ usando o método analítico, tabela:

1º Passo: multiplicar por -1 a inequação $-x^2 -4x - 3 \geq 0 \rightarrow$ $\mathbf{x^2 +4x + 3 \leq 0}$

2º Passo: Achar os zeros $\mathbf{x^2 +4x + 3 \leq 0}$: $x_1=-3$ e o $x_2=-1$;

3º Passo: Factorizar o polinómio o $x^2 +4x + 3 \leq 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{(x+1)(x+3) \leq 0}$

Em seguida lança-los na tabela

X	-∞	-3		-1	+∞
x+1	-	-2	-	0	+
x+3	-	0	+	3	+
(x+1)(x+3)	+	0	-	0	+

Então nossa inequação será satisfeita para: $x \in R[-3,3]$.

Exemplo 2:

Resolva a seguinte inequação quadrática $x^2 + x - 2 > 0$ usando o método analítico, tabela:

1º Passo: Achar os zeros $\mathbf{x^2 + x - 2 > 0}$: $x_1 = -2$ **e** $x_2 = 1$;

2º Passo: Factorizar o polinómio o $\mathbf{x^2 + x - 2 > 0} \rightarrow \mathbf{(x-1)(x+2) > 0}$

Em seguida lança-los na tabela

X	-∞	-2		1	+∞
x-1	-	-3	-	0	+
x+2	-	0	+	3	+
(x+2)(x-1)	+	0	-	0	+

Então nossa inequação será satisfeita para: x ∈R]- ∞,-2[∪]-1, +∞[.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição de inequações quadraticas, resolva os seguintes exercícios:

1. Resolva a seguinte inequação quadrática $-x^2 + x + 6 \leq 0$ usando o método analítico, para achar o conjunto de solução.

$-x^2 + x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) \leq 0$

X	-∞	-2		3	+∞
x+2	-	0	+	0	+
x-3	-	-5	-	3	+
(x+2)(x-3)	+	0	-	0	+

A solução é: x∈R[-2,3]

Dada a inequação quadrática $x^2 - 6x + 9 > 0$ determine o conjunto de solução?

$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3) > 0$

X	-∞	3	+∞
x-3	-	0	+
x-3	-	0	+
(x-3)(x-3)	+	0	+

O conjunto solução é todo R, ou seja x∈R]- ∞, +∞[.

LIÇÃO Nº 3:
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES E INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Todo o conhecimento que aprendemos acerca de equações, funções e inequações quadráticas, pode ser aplicado para resolver questões que nós deparamos com elas no dia-a-dia. Por isso na presente lição, vamos aprender como podemos usar os conhecimentos sobre equações, funções e inequações para resolver problemas.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Resolver Problemas Práticos que Envolvem Funções e Inequações Quadráticas



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Resolução de Problemas Práticos que Envolvem Funções Quadráticas vai precisar de 2 horas.

5.3.1. Resolução Problemas Práticos que Envolvem Funções e e Inequações

Os estudos que foram feitos até aqui das funções quadráticas, equações e inequações irão ser usados agora na resolução de alguns problemas.

Problema 1: Uma máquina de lavar roupa, ao fim de tempo em horas, atinge as produções (p), dada por $p=-5t^2+40t$.

a) Calcule o número de peças lavadas no instante de 2 horas;
b) Determine o número máximo de peças que a máquina pode lavar.
c) Em que instante lava o numero máximo de roupa?

Resolução:

Querido estudante para sabermos qual é o número de peças lavadas no instante de 2 horas, basta substituir por 2 onde tem a letra t (tempo) na função e fica:

a) $m=-5t^2+40t \Rightarrow m= -5(2)^2+40(2) \Rightarrow = -20+80$ e $=60$

O número de peças de roupas lavadas em 2 horas é de 60.

Para responder a as alíneas a) e b), basta achar os vértices da parábola (X_v e Y_v).

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-5)} = 4$

$\Delta=(b)^2-4ac \Rightarrow \Delta=(40)^2-4.(-5).0 \Rightarrow \Delta=1600-0 \Rightarrow \Delta=1600$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-1600}{4(-5)} = \frac{-1600}{-20} = 80$

Onde podemos afirmar que:

c) O número máximo de peças que a máquina pode lavar é de 80.

d) Lava o número máximo de roupa no instante 4.

Exemplo 2:

Uma bola é lançada verticalmente ao ar, com uma velocidade inicial de 20m/s. A altura $h(t)$ da bola, em metros, no tempo t, é dada aproximadamente pela fórmula $h(t) = -5t^2 + 20t + 0{,}5$

a) Quanto tempo a bola se manteve no ar?

b) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

c) Determina o intervalo de tempo em que a altura era superior a 0,5m.

Resolução:

a) Façamos um breve estudo da função para responder as questões:

$a = -5$, a<0, logo a concavidade é voltada para baixo.

Zeros da função: $t \approx 4{,}02 \vee t \approx -0{,}025$

Logo a bola se manteve no ar aproximadamente por 4,02 segundos.

b) Determinar a altura máxima é determinar h_v:

$h_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-210}{4.(-5)} = 20{,}5$ Logo a altura máxima é de 20,5m.

c) Queremos determinar t, tal que $h(t) > 0{,}5 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t + 0{,}5 > 0{,}5$

$\Leftrightarrow -5t^2 + 20t > 0$

$-5t^2+20t=0 \Leftrightarrow t(-5t+20)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee -5t+20=0$

$\Leftrightarrow t=0 \vee t=4$ A altura é superior a 0,5m no intervalo $]0,4[. \Leftrightarrow -5t^2+20t+0,5-0,5>0$

ACTIVIDADES DA UNIDADE/ PREPARAÇÃO PARA TESTE

1. Copie apenas inequações quadráticas?

a) $x^2 - 3x=0$ b) $-x^2 +2x + 8<1$

c)$x^2 +4x + 5>0$ d) $-x^2 +3x - 5=3$

e) $-x^2 +3x^4 >0$ f) $-x^2 +2x\ 6 < 0$

2. Determine usando um dos métodos estudado, o conjunto solução das seguintes equações:

a) $-x^2 + x + 6 < 0$;
b) $x^2 +4x+ 4 >0$.

3.Use o método analítico para achar o conjunto de solução de:

a) $x^2 +4x+ 4<0$;

b) $-x^2 + x + 6 \leq 0$.

4. Usando o método gráfico determine o conjunto de soluções das seguintes inequações: $9 - x^2 > 0$

5. Uma bola atirada de baixo para cima, na vertical, atinge a altura h, em metros, dada por $h(t)=15t-5t^2$ ao fim de t segundos.

a) Qual é a altura máxima atingida pela bola e o tempo gasto nesse percurso?
b) Qual é a altura da bola ao fim de 2 segundos?
c) Em que instante a bola atinge o solo?
d) Em que instante a altura atingida pela bola é superior a 5 metros?

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Apenas são inequações quadrático: b), c) e f).

2.a) $-x^2 + x + 6 < 0$ a solução: $x \in]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$;

b) $x^2 + 4x + 4 > 0$ Solução: $x \in]-\infty,-2] \cup]-2,+\infty[$.

3. a) $x^2 + 4x + 4 < 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) > 0$

X	-∞	-2	+∞
x+2	-	0	-
x+2	-	0	-
(x+2)(x+2)	+	0	+

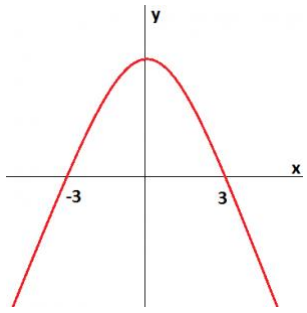
Solução: $x \in \Phi$ (conjunto vazio).

b) $-x^2 + x + 6 \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0$

X	-∞	-2		3	+∞
x+2	-	0	+	0	+
x-3	-	-5	-	3	+
(x+2)(x-3)	+	0	-	0	+

Solução: x IR[-2,3]

4.



S = x ∈ IR[-3,3]

5. **a)** Queremos determinar a altura máxima, ou seja, h_v.

$$h_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{225}{4.(-5)} = 11{,}25$$

Os zeros da função: $h(t) = 0 \Leftrightarrow 15t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t(15-5t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 3$. Conclui-se então que o tempo gasto é de 3 segundos.

b) $h(2) = 15(2) - 5(2)^2 = 30 - 5(4) = 10$. A altura ao fim de 2 segundos é de 10 metros.

c) A bola atinge o solo no instante $t = 3$

d) Queremos determinar o intervalo de tempo tal que $h(t) > 5 \Leftrightarrow 15t - 5t^2 > 5$

$\Leftrightarrow -5t^2 + 15t - 5 > 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 15t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4(-5)(-5)}}{-10}$

$\Leftrightarrow t \approx 0{,}38 \vee t \approx 2{,}62$ Então a altura atingida pela bola é superior a 5 metros no intervalo de tempo $]0{,}38\,;\,2{,}62[$.

6 UNIDADE Nº6: FUNÇÃO, EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA



Estimado(a) estudante(a) bem-vindo a 6ª unidade temática de **Função, Equações, Inequações Exponenciais**. As funções exponenciais têm um papel de grande destaque na matemática, por serem instrumentos eficazes na modelagem de problemas reais ou imaginados e por fornecerem formas eficientes de estudá-los.

Nesta unidade serão desenvolvidas lições que abordam acerca de: identificação de funções, equações, inequações exponenciais, representação gráfica e estudo completo de uma função exponencial e identificação da assímptota horizontal.

Lição1: Equações Exponenciais

Lição2: Função Exponencial

Lição3: Inequações Exponenciais

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar Funções, Equações, Inequações Exponenciais;
- Representar graficamente uma função exponencial;
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem;
- Identificar a assímptota horizontal.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Função Equações, Inequações Exponencial**, você:

- Identifica Funções, Equações, Inequações Exponenciais
- Representa graficamente uma função exponencial;
- Determina: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem;
- Identifica a assímptota horizontal.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de Função Exponencial, você vai precisar de 6 horas e 30 minutos.

MATERIAIS BÁSICOS:

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Régua ou esquadro.

Lição nº1:
EQUAÇÕES EXPONENCIAIS



INTRODUÇÃO

Toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente é uma equação exponencial, as características das equações exponenciais, antes de sofrer qualquer alteração não se comparam com nenhuma expressão aprendida até aqui nesta classe, mas ao longo da redução dos dois membros da equação a potências de mesma base, dependendo dos casos podemos nos deparar com as equações lineares ou quadráticas. Na presente lição iremos aprender identificar e operar as Equações Exponenciais.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar equações exponenciais;
- Efectuar operações com equações exponenciais.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição de **Equações Exponenciais,** você vai precisar de 1 hora e 40 minutos.

6.1.1 Equações Exponenciais

Chamamos de equações exponenciais toda equação na qual a incógnita aparece em expoente.

Exemplos de equações exponenciais:

1) $3^x=81$; 2) $2^{x-5}=16$; 3) $16^x-4^{2x-1}-10=2^{2x-1}$; 4) $3^{2x-1}-3^x-3^{x-1}+1=0$.

Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) Redução dos dois membros da equação a potências de mesma base;

2º) Aplicação da propriedade:

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 1 \text{ e } a > 0)$$

Exemplos

$3^x=81$

Resolução: Como $81=3^4$, podemos escrever $3^x = 3^4$

E daí, x=4;

1) $9^X = 1$

RESOLUÇÃO: $9^X = 1 \Rightarrow 9^X = 9^0$; LOGO X=0.

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$

Resolução : $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^4}{4^4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4$; então $x = 4$.

4) $3^x = \sqrt[4]{27}$

Resolução : $3^x = \sqrt[4]{27} \Rightarrow 3^x = \sqrt[4]{3^3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}}$; logo $x = \frac{3}{4}$

$2^{3x-1} = 32^{2x}$

Resolução: $2^{3x-1} = 32^{2x} \Rightarrow 2^{3x-1} = (2^5)^{2x} \Rightarrow 2^{3x-1} = 2^{10x}$; daí 3x-1=10x, $\Rightarrow$ -7x=1

de onde x=-1/7.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, terminada a aula de Equações Exponenciais, você pode resolver os exercícios abaixo:

a) $2^x = 16$ b) $5^{x-1} = 25$ c) $9^{2x} = 27$ d) $\left(\frac{25}{49}\right)^x = \frac{5}{7}$

e) $13^x = 1$

CHAVE DE CORRECÇÃO

a) x=2 b) x=3 c)x=1/3. d) x=1/2 e)x=0

Lição nº 2:
FUNÇÃO EXPONENCIAL

INTRODUÇÃO

As funções exponenciais têm um papel de grande destaque no dentro da matemática por serem instrumentos eficazes na modelagem de problemas reais ou imaginados e por fornecerem formas eficientes de estudá-los. Assim, por exemplo, é importante entender que certas situações de crescimento ou decrescimento rápido podem ser representadas por funções exponenciais.

OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar uma função exponencial;
- Representar graficamente uma função exponencial;
- Fazer estudo completo da função exponencial.

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **função exponencial,** vai precisar de 2 horas 20 minutos.

6.2.1. Função Exponencial

Estimado estudante, antes de avançarmos com Função Exponencial, importa recapitular acerca das propriedades de potenciação, pois estas são bastante úteis para resolução de Função Exponencial.

Propriedades da Potenciação

Se **a** e **b** forem números positivos e **x**, **y** reais quaisquer, então:

a) $a^0 = 1$ b) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ c) $a^x.a^y = a^{x+y}$ d) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ e) $(a^x)^y = a^{x.y}$

f) $(a.b)^x = a^x.b^x$

Aplicação das propriedades da potenciação:

a) $5^0=1$; **b)** $100^0=1$; **c)** $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$ **d)** $5^3.5^4=5^{3+4}=5^7$; **e)** $\frac{3^4}{3^2}=3^{4-2}=3^2=9$;

f) $(10.4)^4=10^4.4^4$ g) $5^3=5.5.5=125$

Função Exponencial

Chamamos de funções exponenciais aquelas nas quais temos a variável aparecendo em expoente. A função $f:IR \rightarrow IR^+$ definida por $f(x)=a^x$, com $a \in IR^+$ e $a \neq 1$, é chamada função exponencial de base a. O domínio dessa função é o conjunto IR (reais) e o contradomínio é IR^+ (reais positivos, maiores que zero).

Gráfico cartesiano da função exponencial

Temos 2 casos a considerar: quando $a>1$ e quando $0<a<1$.

Acompanhe os exemplos seguintes:

1. $y=2^x$ (nesse caso, a=2, logo $a>1$)

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

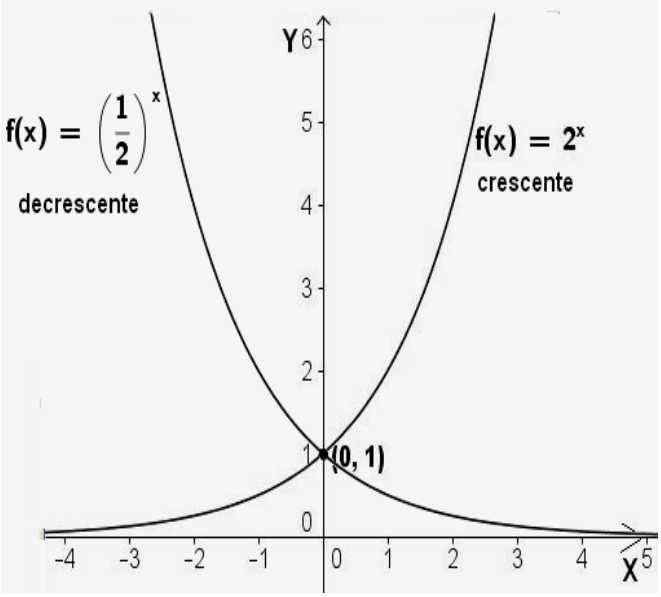
X	-2	-1	0	1	2
Y	¼	½	1	2	4

2. $y=(1/2)^x$ (nesse caso, $a=\frac{1}{2}$, logo $0<a<1$)

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

X	-2	-1	0	1	2
Y	4	2	1	½	1/4

Gráficos das funções exponenciais: Considerando a = 2 e a = $\frac{1}{2}$, construímos os gráficos a seguir:



Nos dois exemplos, podemos observar que:

a) Domínio de existência é sempre $x \in R$;
b) Contradomínio é sempre $y \in R^+$;
c) A monotonia: a > 1, a função é crescente e para 0 < a < 1, a função é decrescente;
d)Os gráficos não intersectam o eixo x, pois as funções não se anulam, seja qual for o valor de x;
e) Os valores da função exponencial são todos positivos, para qualquer que seja o valor x.
f) **Assímptota horizontal** é a recta que se aproxima indefinidamente de uma curva, sem nunca a tocar, para o caso acima é o próprio eixo x, sendo Assímptota horizontal y=0.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, agora tenta resolver o exercício relacionado a função exponencial.

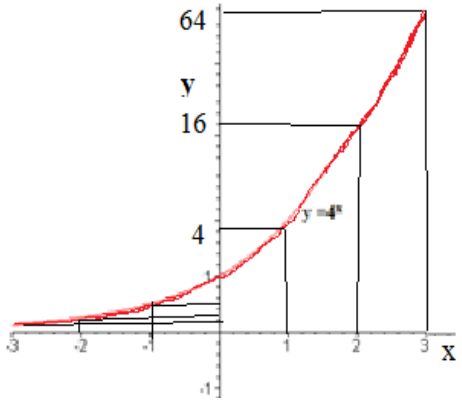
1. Faça esboço com base na tabela das funções que se seguem e estudo completo da função crescente.

a) $y = 4^x$ b) $y = (1/3)^x$

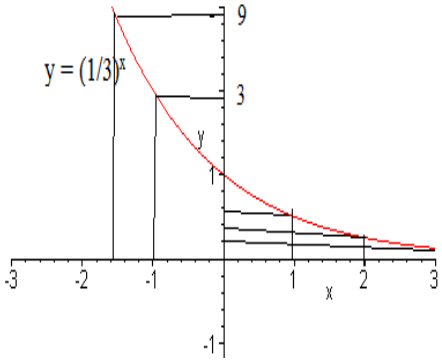
CHAVE DE CORRECÇÃO

	X	-3	-2	-1	0	1	2	3
a)	$y = 4^x$	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64
b)	$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

a)



b)



A função que é crescente é da alínea a) $y=4^x$, por isso é a função que deve-se fazer o estudo completo**.**

temos:

1. **Domínio:** $x \in R$;
2. **Contradomínio:** $y \in R^+$
3. **Zeros:** não tem;
4. **Sinal da função:** é positivo em todo $\Re$;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ é crescente em todo $\Re$;
6. Assímptota horizontal y=0.

Lição nº 3:
INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Já conhece a definição de equação exponencial como uma igualdade que contém funções exponenciais, e sabe que uma inequação qualquer condicional entre duas quantidades e dependente de certas variáveis, desta feita inequação exponencial é toda a desigualdade que contém função exponencial.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar inequações exponenciais;
- Resolver inequações exponenciais.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Inequações Exponenciais, vai precisar de 2 horas 30 minutos.

Inequações Exponenciais

Chamamos de inequações exponenciais toda inequação na qual a incógnita aparece em expoente.

Para resolver inequações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) Redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;

2º) Aplicação da propriedade:

$a>1$	$0<a<1$
$a^m > a^n \Rightarrow m>n$ (as desigualdades têm mesmo sentido)	$a^m > a^n \Rightarrow m<n$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Isso traduz que: mantemos o sinal de desigualdade quando o valor de **a** é maior que 1 e trocamos (invertemos) o sinal de desigualdade quando o valor de **a** está entre 0 e 1.

a) $3^x>81 \rightarrow 3^x>3^4 \rightarrow x>4$ solução: $x\in]4,+\infty[$.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \rightarrow x \leq -3$ solução: $x \in]-\infty, -3]$

Porém, $4^x < 1 \Rightarrow 4^x < 4^0$. Como a base (4) é maior que 1, obtemos:

c) $4^x < 4^0 \Rightarrow x < 0$, Portanto $S = IR^-$ (reais negativos).

d) $5^x \geq 25 \rightarrow 5^x \geq 5^2 \rightarrow x \geq 2$

e) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq 1 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x \geq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \rightarrow x \geq 0$

ACTIVIDADES DA UNIDADE/PREPARAÇÃO PARA O TESTE

Agora vamos resolver as tarefas que lhe propomos para que possa consolidar os conhecimentos que acaba de adquirir para o seu progresso.

1. Determine o conjunto de soluções das seguintes inequações

a) $2^x < 8$ b) $5^{x-1} \geq 25$ c) $3^{2x} > 81$ d) $\left(\frac{5}{7}\right)^x \geq \frac{5}{7}$

e) $\left(\frac{17}{12}\right)^x \leq 1$.

2. Esboce os gráficos das funções: $y=4^x$ e $y=(1/4)^x$ no mesmo S.C.O.

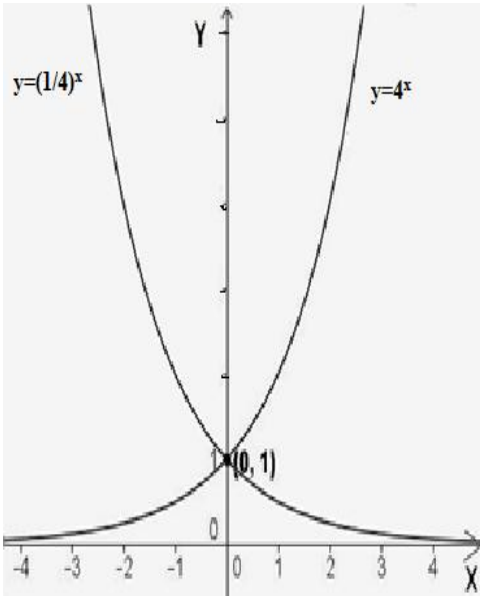
E em seguida faça o estudo do gráfico da função $y=(1/4)^x$

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) $x<3$, S: $x\in]-\infty, 3[$ b) $x\geq 3$, S: $x\in[3,+\infty[$. c)$x>2$, S: $x\in[2,+\infty[$.

d) $x\leq 1$, S: $x\in]-\infty, 1]$ e)$x\geq 0$, S: $x\in]-\infty, 1[$.

2.



Estudo completo da função $y=(1/4)^x$

1. **Domínio:** $x \in R$;
2. **Contradomínio:** $y \in R^+$
3. **Zeros:** não tem;
4. **Sinal da função:** é positivo em todo $\Re$;
5. **Monotonia:** $\rightarrow$ é crescente em todo $\Re$;
6. Assímptota horizontal y=0.

7 UNIDADE Nº7: LOGARITMO, FUNÇÃO, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA



Caro estudante, vamos dar inicio a 7ª unidade temática, lembra-se que na unidade anterior falamos sobre função, equação e inequações exponenciais. A função exponencial apresenta características que se relacionam com a Função Logarítmica que é um dos tópicos desta unidade.

Nesta unidade vai aprender sobre: definição e propriedades de logaritmos, funções, equações e inequações Logarítmicas.

Esta unidade contem 3 (três) lições estruturadas de seguinte modo:

Lição1: Definição e propriedades de Logaritmos
Lição2: Função Logarítmicas;
Lição3: Equações Logarítmicas;
Lição4: Inequações Logarítmicas.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir o conceito de logaritmo de um número;
- Calcular logaritmos aplicando suas propriedades;
- Identificar funções logarítmicas;
- Representar graficamente uma função logarítmica;
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem;
- Identificar a assímptota vertical.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Logaritimo, Função, equações e inequações Logarítmicas**, você:

- Define o conceito de logaritmo de um número;
- Calcula logaritmos aplicando suas propriedades;
- Identifica funções logarítmicas;

- Representa graficamente uma função logarítmica;
- Determina: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem;
- Identifica a assímptota vertical.



DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de **Função Logarítmica, Equação e Inequação,** você vai precisar de 7 horas e 10 minutos.

MATERIAIS BÁSICOS:

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Régua ou esquadro e maquina calculadora.

Lição nº1:
DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE LOGARITMOS



INTRODUÇÃO DA LIÇÃO

Nesta lição vamos falar da definição e propriedades dos logaritmos, um tema novo mas basta prestar atenção para compreender. O cálculo de logaritmo é uma operação inversa da potenciação.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Aplicar a definição no cálculo de logaritmos;
- Identificar as propriedades de logaritmos.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Definição e Propriedades** dos **Logaritmo,** vai precisar de 2 horas.

7.1.1. Definição e Propriedades dos Logaritmo

7.1.1.1 Definição de Logaritmo

Sejam a e b números reais positivos, com a ≠ 1, chamamos de logaritmo de b na base a, o expoente real x ao qual se eleva a para obter b.

Portanto, se $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$, em que b > 0, a > 0 e a ≠ 1.

a= base do logaritmo

b= logaritmando ou antilogaritmo

x= logaritmo

Consequências da definição:

a) $\boxed{\log_b 1 = 0}$; **b)** $\boxed{\log_b b = 1}$; **c)** $\boxed{\log_b b^x = x}$; **d)** $\boxed{b^{\log_b y} = y}$.

Exemplos :

1) $\log_2 32 = 5$ pois $2^5 = 32$

2) $\log_4 16 = 2$ pois $4^2 = 16$

3) $\log_5 1 = 0$ pois $5^0 = 1$

4) $x = \log_{\frac{1}{16}} 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^x = 8 \Rightarrow \left(2^{-4}\right)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{-4x} = 2^3 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Logo, $\log_{\frac{1}{16}} 8 = -\frac{3}{4}$

7.1.1.2. Propriedades operatórias dos logaritmos

Logaritmo do produto: (a>0, $\boxed{\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y}$ a≠1, x>0 e y>0)

Exemplo: $\boxed{\log_2 (16.4) = \log_2 16 + \log_2 4}$

Feito isto temos que calcular cada logaritmo separadamente:

$\log_2 16 = 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$ **logo** $\log_2 16 = 4$;

$\log_2 4 = 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ logo $\log_2 4 = 2$.

O que resta é adicionar os valores: 4+2=6

Logo: $\log_2(16.4)$ =6

2) Logaritmo do quociente: (a>0, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ a≠1, x>0 e y>0)

Exemplo:

$$\log_2\left(\frac{16}{2}\right) = \log_2 16 - \log_2 4$$

Estimado estudante, a forma de calcular este tipo de logaritmo não é diferente do caso acima, calculamos os 2 logaritmos separadamente $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 4 = 2$, depois subtraímos os resultados como a propriedade dita: $\log_2 16 - \log_2 4 \Rightarrow$ 4-2=2

3) Logaritmo da potência: (a>0, a≠1, x>0 e m $\in \Re$)

Exemplo:

$$\log_2 16^2 = 2.\log_2 16$$

Caro estudante, neste caso apenas temos que determinar $\log_2 16$ depois multiplicar por 2.

$2.\log_2 16 = 2.4 \Rightarrow 8$

Caso particular: $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}.\log_a x$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Exemplo:

$$\log_3 \sqrt[3]{27^4} = \log_3 27^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}.\log_3 27$$

Feito isto, determinamos o $\log_3 27$ e depois multiplicamos o resultado com 3/4.

$\log_3 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow$ logo $\frac{4}{3}.\log_3 27 = \frac{3}{4}.3 = \frac{9}{4}$;

Logaritmo decimal: $\log x = \log_{10} x$

Exemplos

log1000, considerando que a base do logaritmo é 10 fica $=\log_{10}1000$ e aplicando a definição obtemos:
$10^x=1000 \rightarrow 10^x=10^3 \rightarrow x=3$

Logo: log1000=3;

log10= 1;

log 100=2.

log $\frac{1}{10}$=-1

log $\frac{1}{10}$=-2

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, como forma de consolidar a matéria, resolva os exercícios abaixo:

1. Aplique as consequências da definição para resolver os seguintes exercícios?

a) $\log_3 3$ b) $\log_3 1$ c) $\log_4 256$

d) $\log_5 5^2$ e) $\log_3 243$ f) $\log_{100} 1$

2. Resolva os seguintes exercícios com base nas propriedades de logaritmos?

a)$\log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3}$; b)$\log_2(32.4)$; c)$\log_2(\frac{32}{4})$;

CHAVE DE CORRECÇÃO

1.a) $\log_3 3=1$ b) $\log_3 1=0$ c) $\log_4 256=4$

d) $\log_5 5^2=2$ e) $\log_3 243=5$ f) $\log_{100} 1=0$

2. a) $\log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3}$; b) $\log_2(32.4)=7$; c) $\log_2(\frac{32}{4})=3$.

Lição nº 2:
FUNÇÃO LOGARÍTMICA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Dando continuidade de estudo de logaritmos, na presente lição vamos abordar a função logarítimica.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar uma função logarítmica;
- Representar graficamente função logarítmica;
- Fazer estudo completo da função logarítmica.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Função Logarítmica** vai precisar de 2 horas.

7.2.1. Função Logarítmica

A função definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$, é chamada função logarítmica de base a. O domínio dessa função é o conjunto IR^+ (reais positivos, maiores que zero) e o contradomínio é IR (reais). Essa função é a função inversa da Função Exponencial.

Temos 2 casos a considerar:

Quando $a > 1$;

Quando $0 < a < 1$.

Acompanhe os casos seguintes, a construção do gráfico:

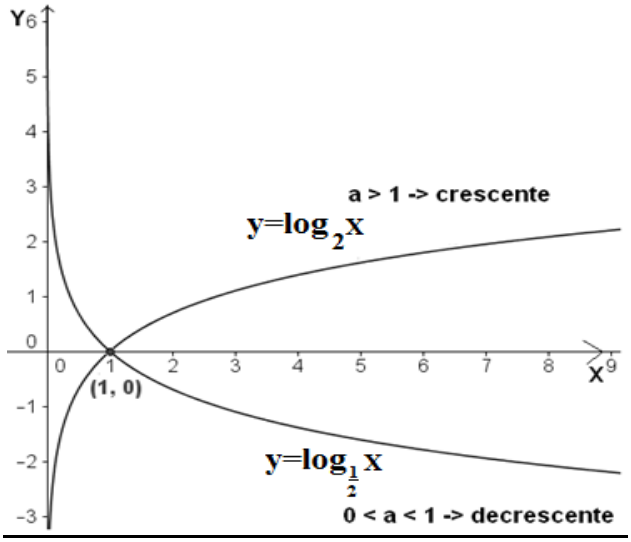
$y=\log_2 x$ (nesse caso, $a=2$, logo $a>1$);

$y=\log_{(1/2)} x$ (nesse caso, $a=1/2$, logo $0<a<1$).

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

	x	¼	½	1	2	4
$\log_2 x$	Y	-2	-1	0	1	2
$\log_{(1/2)} x$	Y	2	1	0	-1	-2

Graficamente temos:



Nos dois exemplos, podemos observar que:

Domínio de existência é sempre x> 0 ou seja $x \in IR^+$

Contradomínio é sempre $y \in IR$;

Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto (1,0). A raiz da função é x=1;

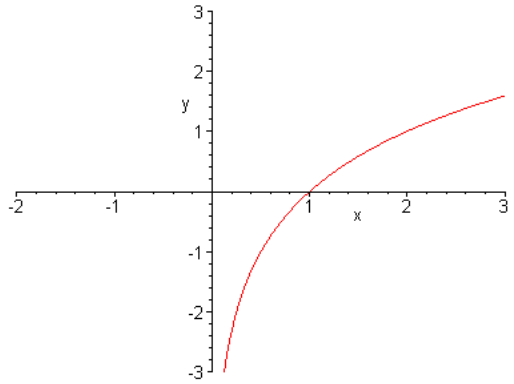
O gráfico nunca intercepta o eixo vertical (y);

Assímptota vertical x=0.

Exemplo:

Dado $\log_4 x$, construi o gráfico e faça o estudo completo

X	1/16	¼	1	4	16
Y	-2	-1	0	1	2



1. Domínio: $x \in IR^{+}$;

2. Contradomínio: $y \in IR$;

3. Zero da função: x=1;

4. Sinal da função de m (x):

X	]0,1[	1	]1,+∞[
M	Negativa	0	Positiva

5. Monotonia: → m (x) é crescente no intervalo]0,+∞[;

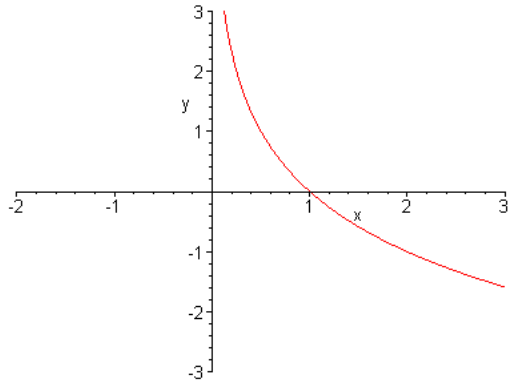
6. Assímptota vertical: x=0.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante para provar se percebeu a matéria de função logaritmica, faça cuidadosamente o seguinte exercício:

Construa o gráfico de $y= \log_{1/4}x$, e faça estudo completo?

CHAVE DE CORRECÇÃO



1. **Domínio:** $x \in IR^{+}$;
2. **Contradomínio:** $y \in IR$;
3. **Zero da função:** $x=1$;
4. **Sinal da função y(x):**

x	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
y	Positiva	0	Negativa

5. **Monotonia:** $\rightarrow$ y é decrescente no intervalo $]0,+\infty[$;
6. **Assímptota vertical:** $x=0$.

Lição nº 3:
EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Querido estudante, nas lições anteriores desta unidade abordamos acerca da definição de logaritmo e função logarítmica, na presente lição vamos falar de equações inequações logarítmicas.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar equações logarítmicas;
- Efectuar operações com equações logarítmicas.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Equações Logarítmicas, vai precisar de 1 horas e 30 minutos.

7.3.1. Equações Logarítmicas

Chamamos de equações logarítmicas toda equação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, no logaritmo ou na base.

Exemplos de equações logarítmicas:

a) $\log_3 x = 5$ b) $\log(x^2-1) = \log 3$

$\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = \log_2 7$ d) $\log_{x+1}(x^2-x)=2$

7.3.1.1 Resolução de equações logarítmicas

Vamos considerar duas situações gerais:

$\log_b x = \log_b y$, onde $x = y$

$\log_b x = a$, onde $x = b^a$

Sendo $b > 0$ e $a \neq 1$, $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$

Restrição: $x > 0$ e $y > 0$.

Exemplos:

$\log_3(x+5) = 2$

Resolução: condição de existência: $x+5>0 \Rightarrow x>-5$

$\log_3(x+5) = 2 \Rightarrow x+5 = 3^2 \Rightarrow x=9-5 \Rightarrow x=4$

Como x=4 satisfaz a condição de existência, então o conjunto solução é S={4}.

$\log_2(\log_4 x) = 1$

Resolução: condição de existência: $x>0$ e $\log_4 x>0$

$\log_2(\log_4 x) = 1$; sabemos que $1 = \log_2(2)$, então

$\log_2(\log_4 x) = \log_2(2) \Rightarrow \log_4 x = 2 \Rightarrow 4^2 = x \Rightarrow x=16$

Como x=16 satisfaz as condições de existência, então o conjunto solução é S={16}.

3) $\log_4(x - 3) = \log_4(- x + 7)$
$x - 3 = - x + 7$
$x + x = 7 + 3$
$2x = 10$
$x = 10/2$
$x = 5$ S={5}.

Lição nº 4:
Inequações Logarítmicas



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, nas lições anteriores desta unidade abordamos acerca da definição de logaritmo e função logarítmica, na presente lição vamos falar de inequações logarítmicas.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar inequações logarítmicas;
- Efectuar operações com inequações logarítmicas.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de Equações Logarítmicas, vai precisar de 1 horas e 40 minutos.

Inequações Logarítmicas

Chamamos de inequações logarítmicas toda inequação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplos de inequações logarítmicas:

$\log_2 x > 0$;

$\log_4(x+3) \leq 1$;

$\log_2(x+2) > \log_2 8$.

Para resolver inequações logarítmicas, devemos realizar dois passos importantes:

1º) Redução dos dois membros da inequação a logaritmos de mesma base;

2º) Aplicação da propriedade:

$$\log_a x > \log_a y$$

Restrição: x > 0 e y > 0.

1ª hipótese: Se a > 1, então

$$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$$

2ª hipótese: Se 0 < a < 1, então

$$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$$

Exemplos

$\log_2 (x+2) > \log_2 8$

Resolução:

Condições de existência: x+2>0, ou seja, x>-2 (S_1)

Como a base (2) é maior que 1, temos:

x+2>8 e, daí, x>6 (S_2)

O conjunto solução é $S= S_1 \cap S_2 = \{x \in IR| x>6\}$.

Portanto a solução final é a intersecção de S_1 e S_2.

$\log_2 (\log_3 x) \geq 0$

Resolução:

Condições de existência: x>0 e $\log_3 x>0$

Como $\log_2 1=0$, a inequação pode ser escrita assim:

$\log_2(\log_3 x) \geq \log_2 1$

Sendo a base (2) maior que 1, temos: $\log_3 x \geq 1$.

Como $\log_3 3 = 1$, então, $\log_3 x \geq \log_3 3$ e, daí, $x \geq 3$, porque a base (3) é maior que 1.

3)$\log_2(x + 2) > \log_2 8$
Como a base (2) é maior que 1, temos:
x + 2 > 8
x > 6
O conjunto solução é $S = \{x \in IR| x> 6\}$.

ACTIVIDADES DA UNIDADE/PREPARAÇÃO PARA O TESTE

Caro estudante, assim que já terminou a unidade de função, equação e inequação logaritmica, você pode resolver os exercícios abaixo:

1. Resolva os exercícios usando a definição e propriedades do logaritmo?

a) $\log_4 \frac{64}{16}$ b) $\log_4 64.16$ c) $\log_{16} 16$ d) $\log_{16} 1$

2. Determine o conjunto solução de cada uma das equações?

a) $\log_{0,2}(3x - 2) = -1$ b) $\log_4(x+3) = 1$

3. Determine o conjunto de solução de cada uma das inequações

a) $\log_5 (2x - 3) < \log_5 x$ b) $\log_{1/2} 3x > \log_{1/2} (2x + 5)$

c) $\log_2 x > 0$ d) $\log 4(x+3) \leq 1$

4. Recorrendo ao método de tabela construa os gráficos das funções $y=\log 3x$ e $y=\log_{1/3}{}^{x}$ no mesmo S.C.O., e faça estudo completo de $y=\log 3x$.

CHAVE DE CORRECÇÃO

1.a) $\log_4 \frac{64}{16} = 1$ b) $\log_4 64.16=5$ c) $\log_{16} 16=1$ d)$\log_{16} 1=0$

2. **Equações**: a) $\log_{0,2}(3x - 2) = -1$, S={7/3} b) $\log_4(x+3) = 1$, S={1}

3. **Inequações**

a) $\log_5 (2x - 3) < \log_5 x$, a solução é $S = \{x \in IR | 3/2 > x > 3\}$;

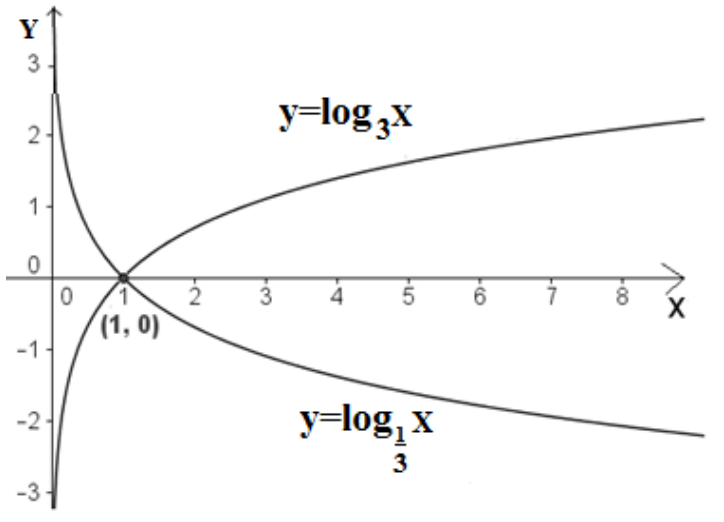
b) $\log_{1/2} 3x > \log_{1/2} (2x + 5)$, a solução é $\{x \in IR | 0 < x < 5\}$;

c)$\log_2 x > 0$, $S = \{x \in IR \mid x > 1\}$;

d)$\log_4(x+3) \leq 1$, $S = \{x \in IR \mid -3 < x \leq 1\}$.

4. Função

	x	1/9	1/3	1	3	9
$\text{Log}_3 x$	y	-2	-1	0	1	2
$\log_{(1/3)} x$	y	2	1	0	-1	-2



Estudo de $y=\log_3 x$

1. Domínio: $x \in IR^{+}$;

2. Contradomínio: $y \in IR$;

3. Zero da função: $x=1$;

4. Sinal da função de $y(x)$:

x	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
y	Negativa	0	Positiva

5. Monotonia: $\rightarrow$ y (x) é crescente no intervalo $]0,+\infty[$;

6. Assímptota vertical: $x=0$.

6

UNIDADE Nº8: TRIGONOMETRIA

INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA



Bem-vindo a 8ª unidade temática: **Trigonometria,** a palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos). Esta unidade contem 5 (cinco) lições, estruturadas de seguinte modo:

Lição1: Revisão de conceitos básicos de trigonometria;
Lição2: Semelhança de Triângulos e Ângulos Especiais;
Lição3: Relações Trigonométricas;
Lição4: Grau e o Radiano.
Lição5: Equações trigonométricas

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Determinar os elementos (lados e ângulos) de um triângulo rectângulo aplicando Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas;
- Identificar os ângulos especiais;
- Resolver problemas práticos associados a vida real;
- Converter a medida de um ângulo de graus em radianos e vice-versa.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Trigonometria**, você:

- Determina os elementos (lados e ângulos) de um triângulo rectângulo aplicando Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas;
- Identifica os ângulos especiais;
- Resolve problemas práticos associados a vida real;
- Converte a medida de um ângulo de graus em radianos e vice-versa.



DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de **Trigonometria,** você vai precisar de 7 horas e 10 minutos.

MATERIAIS BÁSICOS

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis, borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES

Material de geometria (régua, esquadro).

Lição nº1:
REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, a quando da sua criação pelos matemáticos gregos, a trigonometria dizia respeito exclusivamente à medição de triângulos. Porém, as funções trigonométricas resultantes, e apresentadas mais adiante, encontram aplicações mais vastas e de maior riqueza noutras áreas como a Física ou a Engenharia. Nesta lição vamos abordar acerca de conceitos básicos sobre geometria.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar elementos de um triângulo rectângulo;
- Identificar o teorema de Pitágoras.

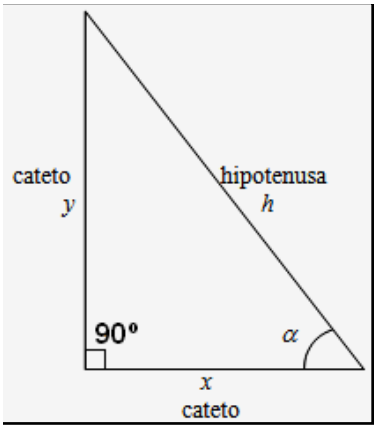
TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Revisão de alguns conceitos sobre trigonometria,** vai precisar de 1 hora e 50 minutos.

8.1.1. Revisão de alguns conceitos sobre trigonometria

As relações trigonométricas apresentadas a seguir, são aplicadas exclusivamente ao estudo de *triângulos rectângulos*. Um triângulo rectângulo tem um ângulo internos recto (90^0) e os restantes ângulos internos são agudos, pois a sua soma tem de ser *igual* a 90º, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180º.

Em trigonometria, os lados dos triângulos rectângulos assumem nomes particulares, apresentados na figura ao lado. O lado mais comprido (h), oposto ao ângulo recto (90^0) chama-se **hipotenusa**; os restantes lados (x e y) ligados ao ângulo recto, chamam-se **catetos**.



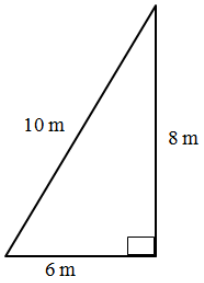
8.1.1.1 Teorema de Pitágoras

O geómetra grego Pitágoras (570-501 a.C.) formulou o segu *quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*. Ou seja, se *x* e *y* forem o comprimento dos dois catetos e *h* o comprimento da hipotenusa, ter-se-á:

$$x^2 + y^2 = h^2$$

Exemplo:

Provemos o Teorema de Pitágoras considerando o triângulo abaixo:



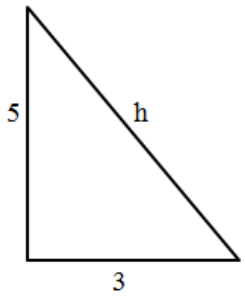
Sabemos que: $x^2 + y^2 = h^2$

Então para este caso fica: $8^2+6^2= 10^2$

$64+36=100$

$100=100$

Exemplo 2: Mesmo faltando uma das medidas dos lados do triângulo, com base no Teorema de Pitágoras, podemos achar a medida do lado em falta. Vamos Determinar a hipotenusa, sabendo que os catetos medem 5 e 3 cm.



Sabemos que: $x^2 + y^2 = h^2$

Então: $5^2+3^2= h^2$

$h^2=25+9$

$h^2=34$ o quadrado da hipotenusa vira raiz e fica

$h=\sqrt{34}$

h= 5.83 cm

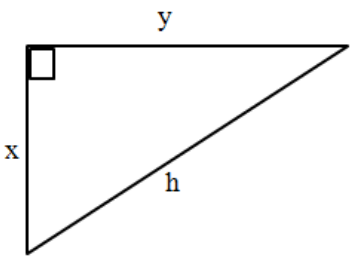
Logo: a medida da hipotenusa é de 5.83 cm.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

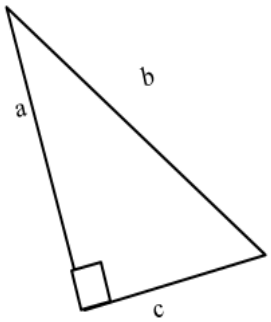
Caro estudante, assim que já terminou a lição de Revisão de conceitos sobre geometria, você pode resolver os exercícios propostos:

1. Dados os triângulos a baixo, identifique os catetos e a hipotenusa

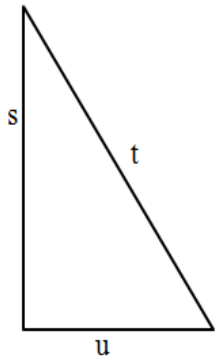
.a)



b)

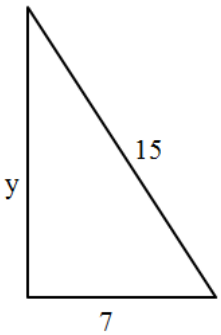


c)

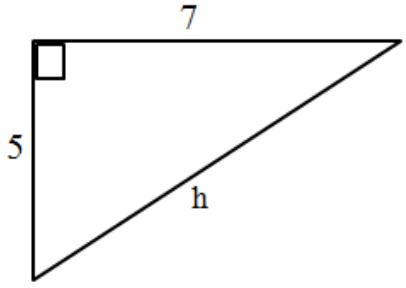


9. Usando o teorema de Pitágoras determine em metro (m) as medidas em falta:

a)



b)



CHAVE DE CORRECÇÃO

1a) Catetos:**x,y**
Hipotenusa :**h**

b) Catetos: **a,c**
Hipotenusa: **b**

c) Catetos: **s, u**
Hipotenusa: **t**

2a) y= 13.26 m

b) h=8.6 m

Lição nº2:
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E ÂNGULOS ESPECIAIS

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Querido estudante, dois triângulos dizem-se semelhantes quando são homotéticos, isto é, quando os lados dos triângulos são proporcionais entre si. E ainda na trigonometria existe um grupo de ângulos que é tido como especial, será necessário que você tenha o domínio destes. Por isso nesta lição vamos abordar acerca de triângulos semelhantes e Ângulos especiais.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar os critérios de semelhança de triângulos;
- Identificar os ângulos especiais.

TEMPO DE ESTUDO:

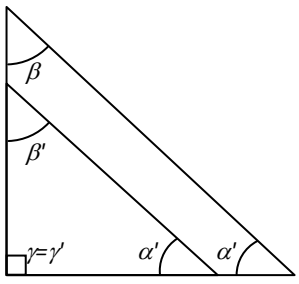
Caro estudante, para estudar a lição de **Semelhança de Triângulos e Ângulos Especiais,** vai precisar de 1 hora e 40 minutos.

8.2.1. Semelhança de Triângulos e Razões Trigonometricas Ângulos Especiais

8.2.1.1. Semelhança de triângulos

Dois triângulos dizem-se semelhantes quando são homotéticos, isto é, quando existe uma **homotetia** entre os dois triângulos – os lados dos triângulos são proporcionais entre si. Das seguintes relações de semelhança, conclui-se que os dois triângulos a considerar são homotéticos:

a) **Três lados proporcionais [LLL], ou**
três ângulos iguais entre si [AAA];
O efeito produzido por [LLL] ou por [AAA] é o mesmo, e equivalem entre si: dois triângulos com ângulos iguais entre si têm lados correspondentes com comprimento de igual proporção, e vice-versa.



b) dois lados proporcionais e um ângulo igual [LAL];

Aqui quando, dois lados dos triângulos são proporcionais, e um dos ângulos de um triângulo tem igual abertura ao do ângulo correspondente no outro triângulo.

c) dois ângulos iguais e um lado proporcional [LAA];

Dois ângulos quaisquer são iguais. Tem-se $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, e um valor para x'/x. Então resulta que o terceiro ângulo é igual para os dois triângulos, e que os lados são proporcionais.

Estas classificações não devem ser confundidas com as de triângulo equilátero, isósceles e escaleno.

8.2.1.2. Razoes Trigonométricas de Ângulos especiais

Podemos determinar seno, co-sseno, tangente e co-tangente de alguns ângulos, esses ângulos são chamados de notáveis, os ilustrados na tabela abaixo.

	Valores do argumento α (graus)				
	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
senα	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0
tanα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Não existe
cotgα	Não existe	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0
	0	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**
	Valores do argumento α (radianos)				

Lição nº3:
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Dando continuidade de estudo de trigonometria, nesta lição vamos abordar as relações trigonométricas. Diversas aplicações trigonométricas relacionam as medidas dos lados de um triângulo recorrendo a determinadas relações, dependendo dos ângulos internos. Assim, apresentam-se de seguida algumas relações trigonométricas com esse fim.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

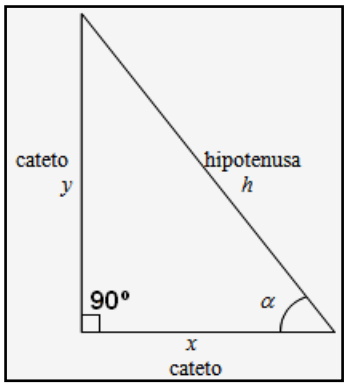
- Identificar as relações trigonométricas.

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de relações trigonométricas**,** vai precisar de 1 hora e 40 minutos.

8.3.1. Relações trigonométricas

Com base num triângulo rectângulo podemos obter as seguintes relações trigonométricas:



a) **Seno de α:** É o quociente do comprimento do cateto *oposto* ao ângulo **α** pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja, $\boxed{sen(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}}$.

b) **Cosseno de α:** É o quociente do comprimento do cateto *adjacente* ao ângulo **α** pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja, $\boxed{\cos(\alpha)=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{x}{h}}$.

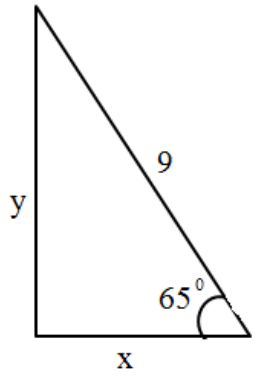
c) Tangente de α: É o quociente dos comprimentos do cateto *oposto* pelo cateto *adjacente*, ou seja,

$$\boxed{\tan(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}=\frac{y}{x}}.$$

c) Co-tangente de α: É o quociente dos comprimentos do cateto *adjacente* pelo cateto *oposto*, ou seja,

$$\boxed{\cot g(\alpha)=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}=\frac{x}{y}}.$$

Exemplo 1: No triângulo rectângulo abaixo, determine as medidas **x** e **y**. (Usando: sen65º = 0,91; cos65º = 0,42 e tg65º = 2,14).



$$\begin{cases} sen65^o=\frac{cat.op}{hip}=\frac{y}{9}\Rightarrow\frac{y}{9}=0{,}91\Rightarrow x=9.(0{,}91)=8{,}19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 65^o=\frac{cat.adj}{hip}=\frac{x}{9}\Rightarrow\frac{x}{9}=0{,}42\Rightarrow y=9.(0{,}42)=3{,}78 \end{cases}$$

8.3.2. Relação fundamental da trigonometria

A relação que se segue é de grande utilidade na trigonometria e por via disso recebe a designação de relação fundamental da trigonometria.

$$\text{sen}^2\,x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}^2\,x=1-\cos^2 x \\ \cos^2=1-\text{sen}^2\,x \end{cases}$$

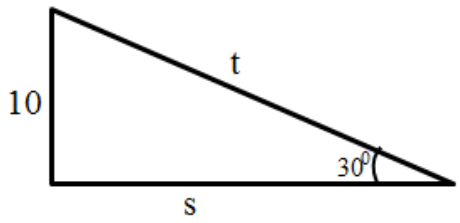
A partir desta relação podem ser deduzidas outras relações equivalentes como por exemplo:

- $tgx=\frac{sen\ x}{\cos\ x}$;
- $\cot gx=\frac{sen\ x}{\cos\ x}$.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, como forma de consolidar a matéria, resolva os exercícios propostos:

1. Usando os conhecimentos da relação trigonométrica, determine no triangulo abaixo, os valores de t e de s.



3. Qual é o comprimento da sombra de um poste de 5m no instante em que os raios solares estão formando um ângulo de 60º com o solo?

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Sabe-se que:

$$\begin{cases} sen30^o = \dfrac{cat.op}{hip} = \dfrac{10}{t} \\ sen30^o = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 20$$

$$\begin{cases} tg30^o = \dfrac{cat.op}{cat.adj} = \dfrac{10}{c} \\ tg30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$$

LIÇÃO Nº4:
GRAU E O RADIANO

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Estimado estudante, nesta quarta lição vamos tratar da conversão de radianos em graus e vice-versa.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Converter a medida de um ângulo de radianos em graus;
- Converter a medida de um ângulo de graus em radianos.

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Grau e o Radiano,** vai precisar de 2 horas.

8.4.1. Grau e o Radiano

8.4.1.1. Radiano

A unidade de medida de ângulo no Sistema Internacional é o radiano e o processo para obter um radiano a partir do grau, basta efectuar uma regra de três simples da forma:

$$\begin{array}{ccc} \pi rad & \rightarrow & 180^o \\ x & \rightarrow & \hat{a}ngulo(graus) \end{array}$$

Exemplos: vamos determinar o radiano de cada ângulo abaixo

a) $30^o \begin{cases} \pi rad & \rightarrow & 180^o \\ x & \rightarrow & 30^o \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(30^o)(\pi rad)}{180^o} = \frac{\pi rad}{6}$

b) $120^o \begin{cases} \pi rad & \rightarrow & 180^o \\ x & \rightarrow & 120^o \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(120^o)(\pi rad)}{180^o} = \frac{2\pi rad}{3}$

8.4.1.2. Conversão da medida de um ângulo de radianos em graus

Esse cálculo também poderia ser realizado pela regra de três simples, mas outra forma é substituir πrad pelo seu correspondente em graus, 180º, e simplificar a fracção. Veja os exemplos:

a) $\frac{10\pi}{9} rad = \frac{10(180^o)}{9} = \frac{1800^o}{2} = 200^o$;

b) $\frac{\pi}{9} rad = \frac{(180^o)}{9} = 20^o$;

LIÇÃO Nº5:
EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Caro estudante, concluir o estudo de trigonometria, nesta lição vamos abordar equações trigonométricas.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir equações trigonométricas;
- Resolver equações trigonométricas.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição de **Equações Trigonométricas**, vai precisar de 2 hora e 30 minutos.

8.5.1. Equações Trigonométricas

Uma equação trigonométrica envolve como incógnitas arcos de circunferência e relacionados por meio de funções trigonométricas. Por exemplo:

Toda equação trigonométrica, por mais complicada que pareça, pode ser reduzida em uma equação do tipo: **sen x = sen a; cos x = cos a; tg x = tg a e cotg x= cotg x.**
Sendo: **x** a incógnita e **a** um arco de medida conhecida.

1. Equações do tipo sen x = sen a

Com relação ao arco a, existem duas possibilidades para x:

i) $x = a$

ii) $x = (\pi - a)$

Exemplo 1. Resolva a equação $2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$

Temos $2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

O arco que apresenta o seno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é o de 60^o ou $\frac{\pi}{3}$ rad (vide na tabela de razões na lição 2 desta unidade).

Então x= 60^o ou x= 180^o -60^o $\Leftrightarrow$ x=60^o ou x= 120^o

Também podem ser resolvidas as equações trigonométricas considerando um dado intervalo, veja: resolvendo em IR a equação 2 sen x-$\sqrt{3}$= 0 , se x $\in$ [0, 90^o].

Como já resolvemos a equação 2 sen x-$\sqrt{3}$= 0 anteriormente, obtemos x=60^o ou x= 120^o.

Com base no intervalo dado de x $\in$ [0, 90^o], o conjunto solução da equação 2 sen x-$\sqrt{3}$= 0 é de x=60^o.

2. Equações do tipo cos x= cos a

Com relação ao arco a, existem duas possibilidades para x

i) x = a;

ii) x = -a.

Exemplo: Resolva a equação cos 2x= cos (x + $\frac{\pi}{6}$)

Resolvendo a equação cos 2x= cos (x + $\frac{\pi}{6}$) temos:

2x= x + $\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$ 2x-x= $\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$cos x= cos $\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$ x= $\frac{\pi}{6}$rad

Ou 2x=- (x + $\frac{\pi}{6}$)$\Leftrightarrow$ 2x+x=– $\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$ 3x=– $\frac{\pi}{6}$$\Leftrightarrow$ x=– $\frac{\pi}{18}$rad

3. Equações do tipo Tg x= tg a

Para este caso, com relação ao arco a, existem a seguinte possibilidades para x:

Tg x=a$\Rightarrow$tg x= a

Exemplo : Resolver a equação tg 3x= x+2

Temos: tg 3x= x+2 $\Leftrightarrow$ 3x-x= 2 $\Leftrightarrow$ 2x= 2 $\Leftrightarrow$ x=$\frac{2}{2}$ $\Leftrightarrow$ tg x=1 $\Leftrightarrow$ tg x= 45^o

x= 45^o

CHAVE DE CORRECÇÃO

a) $x=\frac{\pi}{5}$ ou $x=\frac{4\pi}{5}$ b) $x=45^{o}$ c) $x=\frac{\pi}{6}rad$

ACTIVIDADES DA UNIDADE/PREPARAÇÃO PARA O TESTE

Caro estudante, assim que já terminou a aula de grau e radiano, você pode resolver os exercícios abaixo:

1. Usando teorema de Pitágoras ache os lados dos triângulos em falta.

a) Seja dado um triângulo que os seus catetos medem 7 e 5 metros, quanto mede a hipotenusa?

b) Um dos catetos mede 12 cm e a hipotenusa 16 cm, quanto mede o outro cateto?

2.a) Um poste eléctrico é fixado ao solo por um cabo que forma um ângulo de 45º com o chão. A distância entre as extremidades inferiores do poste e do cabo é de 25m, como mostra a figura ao lado. Determine a medida da altura do poste.

$Tg45^{0}=1$

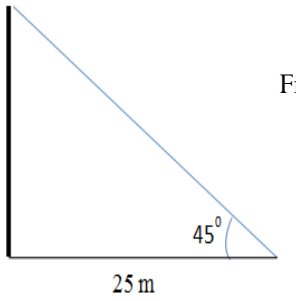


Figura 61

b) Uma escada está encostada numa parede formando um ângulo de 30º com o chão. Se a escada tem 25m de comprimento, que altura ela atinge? Sen de 30 º=1/2.

3. Converta as seguintes medidas para radiano?

a) 315^{o} b) 135^{o} c) 225^{o} d) 30^{o}

4. Converta as seguintes medidas de radiano em graus?

a) $\frac{\pi}{20}rad$ b) $\frac{4\pi}{3}rad$

5. Resolva a equação 2sen x-1=0, sendo que $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

CHAVE DE CORRECÇÃO

1.a) A hipotenusa mede 8.6 metros;

b) O outro cateto mede 10.58 cm.

2) a) A altura do poste de 45 metros.

b) a escada atinge 12.5 metros.

3.a) $\frac{7\pi rad}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}rad$ c) $\frac{5\pi}{4}rad$ d) $\frac{\pi}{6}rad$

4. a) 9^o b) 240^o

5.x=30^o

9 UNIDADE Nº9: ESTATÍSTICA

INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA

Bem-vindo ao estudo da 9ª unidade temática: **Estatística.** A estatística contem meios para delimitar estudos, tratar dados, resolver problemas, quantificar os dados de uma maneira eficaz. Esta unidade contem 4 lições, que abordam acerca de: conceitos básicos; Identificação de variáveis; Organização e interpretação d estatística em tabelas e gráficos; Determinação de frequências. A unidade está estruturada de seguinte modo:



Lição1: Conceitos Básicos de Estatística Descritiva;

Lição2: Distribuição e Determinação De Frequência;

Lição3: Média e Moda

Lição4: Mediana

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir população e amostra;
- Identificar variáveis discretas e variáveis contínuas;
- Organizar e interpretar informação estatística em tabelas e gráficos;
- Determinar frequências;
- Resolver problemas práticos aplicando conhecimentos da estatística.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Estatística**, você:

- Define população e amostra;
- Identifica variáveis discretas e variáveis contínuas;
- Organiza e interpretar informação estatística em tabelas e gráficos;
- Determina frequências;

- Resolve problemas práticos aplicando conhecimentos da estatística.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de **Estatística** você vai precisar de 9 horas.

MATERIAIS BÁSICOS:

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha.

MATERIAIS COMPLEMENTARES:

Régua ou esquadro e máquina calculadora.

Lição nº1:
CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Caro estudante, podemos entender estatística como sendo o método de estudo de comportamento colectivo, cujas conclusões são traduzidas em resultados numéricos, no entanto nesta lição vamos dar inicio ao estudo dos conceitos básicos de estatística descritiva.



OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir Conceitos Básicos de Estatística Descritiva.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Conceitos Básicos de Estatística Descritiva,** vai precisar de 2 horas.

9.1.1. Conceitos básicos de estatística descritiva

Estatística

É uma parte da matemática aplicada que fornece métodos para colecta, organização, descrição, análise e interpretação de dados e para a utilização dos mesmos na tomada de decisões.

População é o conjunto total de elementos portadores de, pelo menos, uma característica comum.

Amostra é uma parcela representativa da população que é examinada com o propósito de tirarmos conclusões sobre essa população.

Variáveis

Chama-se **variável** ao conjunto de resultados possíveis de um fenómeno.

Variável Qualitativa: Quando os seus valores são expressos por atributos: sexo, cor da pele, etc.

Variável Quantitativa: Quando os dados são de carácter nitidamente quantitativo, e o conjunto dos resultados possui uma estrutura numérica, trata-se portanto da estatística de variável e se dividem em :

Variável discreta ou descontínua: Seus valores são expressos geralmente através de números inteiros não negativos. Resulta normalmente de contagens. Ex: Nº de estudantes presentes às aulas de introdução à estatística no 1º semestre de ano Z: Março = 18 , Abril = 30 , Maio = 35 , Junho = 36.

Variável contínua: Resulta normalmente de uma medição, e a escala numérica de seus possíveis valores corresponde ao conjunto R dos números Reais, ou seja, podem assumir, teoricamente, qualquer valor entre dois limites.

Exemplos

. Cor dos olhos das alunas:	qualitativa
. Índice de liquidez nas indústrias capixabas:	quantitativa contínua
. Número de defeitos em aparelhos de TV:	quantitativa discreta
. Comprimento dos pregos produzidos por uma empresa:	quantitativa contínua
. O ponto obtido em cada jogada de um dado:	quantitativa discreta

9.1.2. Apresentação dos Dados

Há duas formas de apresentação, que não se excluem mutuamente. A **apresentação tabular (tabela),** é uma apresentação numérica dos dados em linhas e colunas distribuídas de modo ordenado. A **apresentação gráfica** dos dados numéricos constitui uma apresentação geométrica permitindo uma visão rápida e clara do fenómeno.

A representação gráfica de um fenómeno deve obedecer a certos requisitos fundamentais, para ser realmente útil: a **Simplicidade; Clareza e a Veracidade.**

Os principais tipos de gráficos são:

Gráfico em colunas ou em barras: É a representação de uma série por meio de rectângulos, dispostos verticalmente (em colunas) ou horizontalmente (em barras).

Gráfico circular este gráfico é construído com base em um círculo, e é empregado sempre que desejamos ressaltar a participação do dado no total. O total é representado pelo círculo, que fica dividido em tantos sectores. Obtemos cada sector por meio de uma regra de três simples e directa, onde o total da série corresponde a 360°, ou seja, 360°→100%.

O pictograma constitui um dos processos gráficos que melhor fala ao público, pela sua forma ao mesmo tempo atraente e sugestiva. A representação gráfica consta de figuras.

Ilustrações

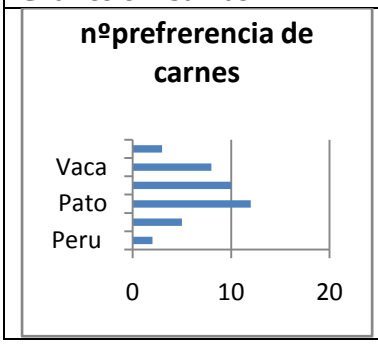
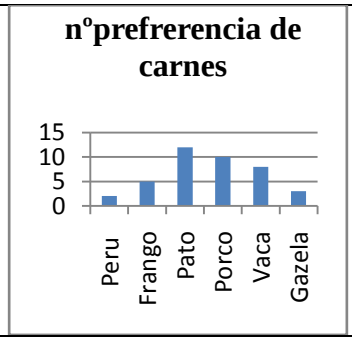
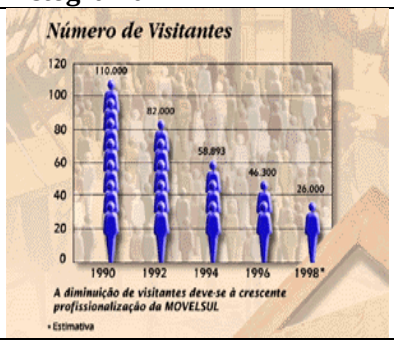
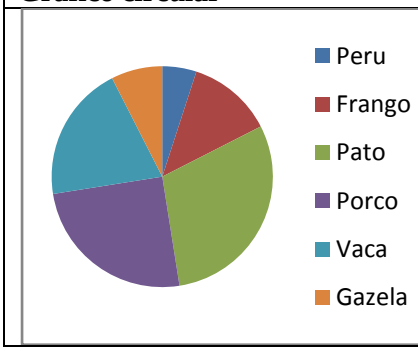
Gráfico em barras	Gráfico em colunas	Pictograma
		

Gráfico circular


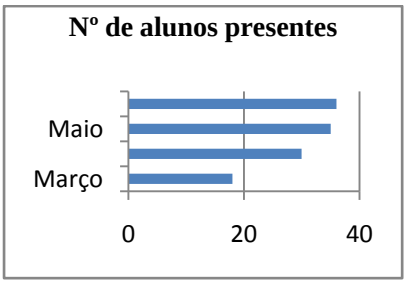
ACTIVIDADES DA LIÇÃO

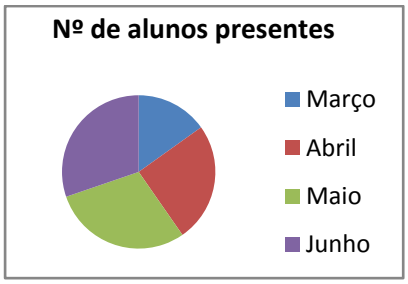
Caro estudante, resolva os seguintes exercícios:

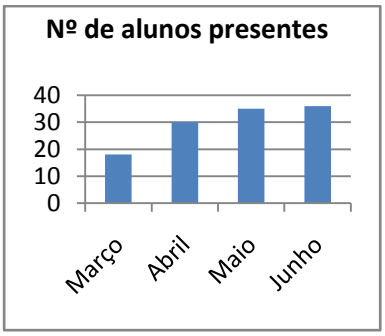
1. Agrupe as seguintes variáveis em qualitativa e quantitativa: 5 kg de arroz, feijão branco, olhos azuis, 2 metros de altura, 5 cadernos, mulher.

2. Represente os seguintes dados numa tabela: Nº de estudantes presentes às aulas de introdução à estatística no 1º semestre de ano Z: Março = 18 , Abril = 30 , Maio = 35 , Junho = 36.

3. Identifique tipos de gráficos são:







a)_____ **b)**_____ **c)**_____

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. **Variáveis qualitativas:** feijão branco, olhos azuis e mulher.

Variáveis quantitativas: 5 kg de arroz, 2 metros de altura, 5 cadernos.

2.

Meses	Nº de estudantes presentes
Março	18
Abril	30
Maio	35
Junho	36

3.

a) Gráfico em barras

b) Gráfico circular

c) Gráfico em colunas

Lição nº 2:
DISTRIBUIÇÃO E DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Assim que já estudamos sobre conceitos básicos da estatística descritiva, vamos dar continuidade para por em pratica o conhecimento adquirido. Caro estudante, a partir de dados não ordenados é difícil formarmos uma ideia exacta dos mesmos dados, havendo necessidade de organiza-los. Por isso nesta lição vamos aprender acerca da distribuição de dados em frequência e como determinar os tipos de frequência.



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Agrupar os dados de acordo com a frequência;
- Determinar frequências.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Distribuição e Determinação De Frequência,** vai precisar de 2 horas e 30 minutos.

9.1.2. Distribuição e Determinação De Frequência

9.1.2.1. Distribuição de frequência

É um tipo de tabela que condensa uma colecção de dados conforme as frequências (repetições de seus valores).

Exemplo :44, 41, 42, 41, 42 43, 44, 41,

ROL: É a tabela obtida após a ordenação dos dados (crescente ou decrescente).

xi	Repetições	Frequência Absoluta (fi)
41	|||	3

Exemplo: 41, 41, 41, 42, 42 43, 44, 44

Distribuição de frequência sem intervalos de classe: É a simples condensação dos dados conforme as repetições de seus valores, como mosta a tabela ao lado.

42	||	2
43	|	1
44	|||	3

9.1.2.Tipos de Frequências:

Frequência simples ou absoluta: (f_i)
São os valores que realmente representam o número de dados de cada classe.
$\sum f_i = n$

Frequência Relativa: (f_{ri})
são os valores das razões entre as frequências simples e a frequência total.
$f_{ri} = f_i / \sum f_i$

Evidentemente: $\sum f_{ri} = 1$ ou 100

Frequência acumulada (F_i)
Chama-se frequência acumulada de uma classe à soma da frequência absoluta da classe com as das classes inferiores.
$F_k = f_1 + f_2 + ... + f_k$ ou $F_k = \sum f_i (i = 1, 2, ..., k)$

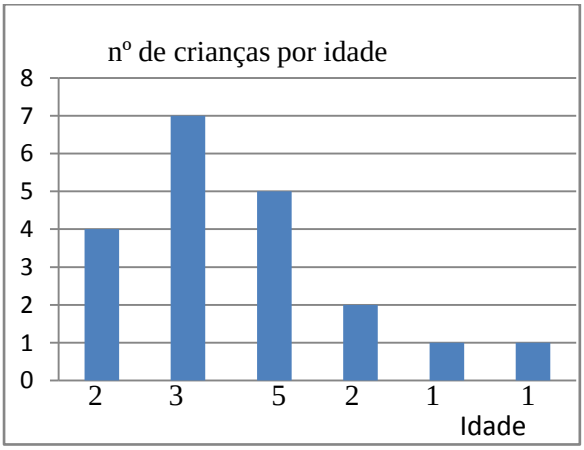
Frequência acumulada relativa (Fr_i)
de uma classe é a frequência acumulada da classe, dividida pela frequência total da distribuição.
$Fr_i = F_i / \sum f_i$ ou $F_r = \frac{F}{F_t} \times 100\%$

Exemplos 1: Foi planeado um estudo num orfanato em que queria se saber quantas crianças são por idade, percentagem por idade, as frequências acumuladas e construir um gráfico de coluna da e frequência absoluta?

Feito o estudo obteve-se os resultados ilustrados na tabela abaixo (caro estudante qualquer duvida para entender a tabela abaixo, reveja os tipos de frequências):

Idade das crianças	f_i	f_{ri} (%)	F_i	Fri (%)
2	4	20	4	20
3	7	35	11	55
4	5	25	16	80
5	2	10	18	90
6	1	5	19	95
7	1	5	20	100
	$\sum f_i$ = 20	$\sum f_{i=100}$		

Gráfico em coluna:



Exemplo 2: Numa turma foram registadas as notas de todos os 25 estudantes.

15	16	16	15	16	14	15	15	
15	17	16	14	14	16	15	16	
14	17	15	16	14	15	15	17	15

Determine:

a) Quantos estudantes obtiveram cada nota?

b) Qual é a nota que foi obtida por maior parte dos estudantes?

c) Qual é a nota que tem menor percentagem e quanto é;

d) Quantos estudantes que tiveram notas no intervalo de 10 a 13?

e) Quantos estudantes tiveram nota no intervalo de 14 a 16?

f) Construa um gráfico circular?

Caro estudante, para resolvermos as questões acima colocadas, primeiro devemos achar a frequência absoluta das notas, contando o número de vezes que cada nota esta repetida, de seguinte modo:

Notas	Repetições	Frequência absoluta (fi)
14	|||||	5
15	||||| |||||	10
16	||||| ||	7
17	|||	3
∑		25

Agora já podemos construir a tabela de frequência absoluta e por meio dela achar as demais frequências, para em seguida responder as questões colocadas:

Notas	**Frequência absoluta ($f_{i)}$**	**Freqüência relativa(%) ($f_{ri)}$**	**Frequência Acumulada ($F_{i)}$**	**Frequência acumulada relativa (Fr_i)**
14	5	0.2	5	0.2
15	10	0.4	15	0.6
16	7	0.28	22	0.88
17	3	0.12	25	1
Total	25	1		

Respostas

a) Para saber quantos estudantes obtiveram cada nota, basta olha na tabela a frequência absoluta;

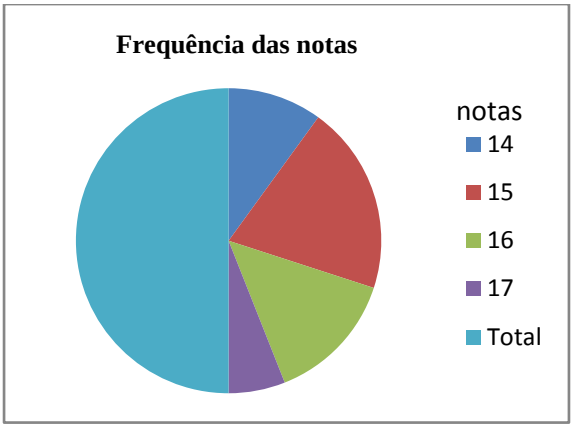
b) A nota que foi obtida por maior parte dos estudantes é de 15 valores;

c) A nota que tem menor percentagem é de 14 valores, que tem menor percentagem de 0.2 ou seja 20%;

d) Nenhum;

e) Os estudantes que tiveram notas no intervalo de 14 a 16 são 22 estudantes.

f)Gráfico circular



ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim da lição de distribuição e determinação de frequência, será muito proveitoso resolver os seguintes exercícios:

1. Foi feito um estudo com alguns consumidores para saberem qual é o tipo de carne que cada um prefere e constatou-se que:

2.

Carnes	Perú	Frango	Pato	Porco	Vaca	Gazela
Nº de consumidores	2	5	12	10	8	3

Determine:

a) Qual é o número total de consumidores envolvidos no estudo?

b) Qual é o número percentual de consumidores de cada tipo de carne?

c) Qual é a carne mais consumida? e a menos consumida?

d) Quais são as carnes que tem no mínimo 10 consumidores?

e) Construa o gráfico em coluna de numero de consumidores por carne?

Caro estudante, espero que acertou, e que determinou as frequência na tabela primeiro para facilitar:

Carnes	Frequência absoluta ($f_{i)}$	Frequência relativa ($f_{ri)}$ (%)	Frequência Acumulada ($F_{i)}$	Frequência acumulada relativa (Fr_i) (%)
Peru	2	5	2	5
Frango	5	12.5	7	17.5
Pato	12	30	19	47.5
Porco	10	25	29	72.5
Vaca	8	20	37	92.5
Gazela	3	7.5	40	100
Total	40	100		

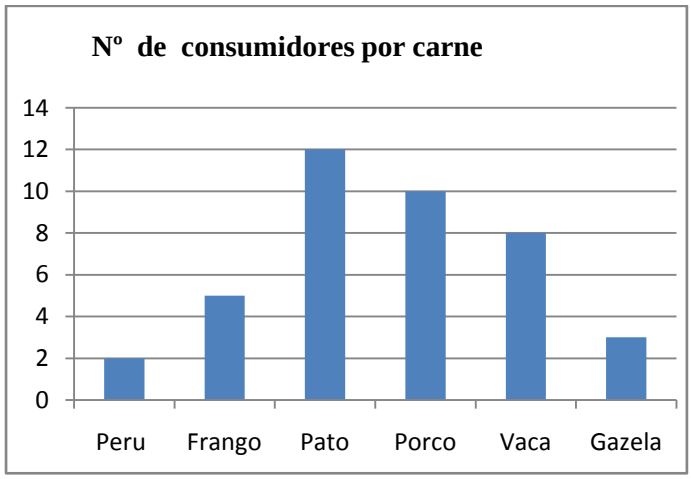
a) O número total de consumidores envolvidos no estudo é de 40.

b) Observar na tabela a **Frequência relativa ($f_{ri)}$ (%)**

c) A carne mais consumida é de pato e a menos consumida é de peru.

d) As carnes que têm no mínimo 10 consumidores são de pato e porco;

e) Gráfico em coluna do número de consumidores por carne



Lição nº3:
MÉDIA E MODA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Os estudos que fizemos até aqui nesta unidade, sobre distribuições de frequências e gráficos, permite-nos descrever e representar, de modo geral, os grupos de valores que uma variável pode assumir. Porém, para ressaltar as tendências características de cada distribuição, isoladamente, ou em confronto com outras, necessitamos introduzir conceitos que se expressem através de números, que são as **medidas de tendência central** (média, moda e mediana). A nossa atenção para esta lição estará virada para média e moda



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Determinar a média e moda;



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de média e moda**,** vai precisar de 2 horas 30 minutos.

9.3.1. Média E Moda

Dentre as **medidas de tendência central**, destacamos: a média aritmética; a mediana e a moda.

9.3.1.1. Média Aritmética: ($\bar{x}$)

Média aritmética é o quociente da divisão da soma dos valores da variável pelo número de dados (valores):

Para dados não agrupados

$\bar{x} = \sum x_i / n$ **ou seja** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

Sendo: $\bar{x}$ – a média aritmética
x_i – os valores da variável
n – o número de valores.

Exemplo 1:

Sabendo-se que a produção leiteira diária da vaca A, durante uma semana, foi de 10, 14, 13, 15, 16, 18 e 12 litros, temos, para produção média da semana:

$\bar{x}$ = 10 + 14 + 13 + 15 + 16 + 18 + 12 / 7 → $\bar{x}$ =98/7 → $\bar{x}$ **= 14 litros**

Dados agrupados mais não em classe

Média aritmética ponderada determina-se nos dados agrupados mais não em classe,

A média aritmética ponderada, dada pela fórmula: $\bar{x} = \sum \mathbf{x_i.f_i} / \sum \mathbf{f_i}$.

O modo mais prático de obtenção da média ponderada é abrir, na tabela, uma coluna correspondente aos produtos $x_i.f_i$;

Notas dos alunos	***fi***	$x_i f_i$
5	2	10
10	6	60
15	10	150
8	12	96
20	4	80
	$\sum = 34$	$\sum = 396$

Temos, então: $\sum x_i.f_i = 396$ e $\sum f_i = 34$

Logo: $\bar{x} = \sum x_i f_i / \sum f_i$ x = 396 / 34=11.6

A media das notas dos alunos é de 11.6

Para determinar a média aritmética **Com intervalos de classe,** neste caso, convencionamos que todos os valores incluídos em um determinado intervalo de classe coincidem com seu ponto médio, e determinamos a média aritmética ponderada por meio da fórmula: $\bar{x} = \sum \mathbf{x_i f.i} / \sum \mathbf{f_i}$, onde x_i é o ponto médio da classe.

9.3.1.2. Moda

É o valor que ocorre com maior frequência em uma série de valores.

Quando os dados não estão agrupados

- A moda é facilmente reconhecida: basta, de acordo com definição, procurar o valor que mais se repete. Ex: Na série { 7 , 8 , 9 , 10 , 10 , 10 , 11 , 12 } a moda é igual a **10.**

- Há séries nas quais não exista valor modal, isto é, nas quais nenhum valor apareça mais vezes que outros. Ex: { 3 , 5 , 8 , 10 , 12 } **não apresenta moda**. A série é **amodal**.

- .Em outros casos, **pode haver dois ou mais valores de concentração**. Dizemos, então, que a série tem dois ou mais valores modais. Ex: { 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 7 , 7 , 7 , 8 , 9 } apresenta duas modas**: 4** e **7**. A série é **bimodal**.

A Moda quando os dados estão agrupados

- **Sem intervalos de classe**: Uma vez agrupados os dados, é possível determinar imediatamente a moda: basta fixar o valor da variável de maior frequência.

- **Com intervalo de classe:** A classe que apresenta a maior frequência é denominada **classe modal**. Pela definição, podemos afirmar que a moda, neste caso, é o valor dominante que está compreendido entre os limites da classe modal. O método mais simples para o cálculo da moda consiste em tomar o ponto médio da classe modal.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Para provar a sua compreensão em torno da matéria da média aritmética e moda, resolva os exercícios que se seguem:

1. **Com base nos dados abaixo determine:**

a) A moda?

b) E a média aritmética?

Notas	fi
14	5
15	10
16	16
17	3
∑	25

2. Seja dado os dados: 41, 41, 41, 42, 42 43, 44, 44**,** determine:

a) A moda?

b) E a média aritmética?

3. Determine a moda dos seguintes tipos de carne.

Carnes	Perú	Frango	Pato	Porco	Vaca	Gazela
Nº de consumidores	2	5	12	10	8	3

CHAVE-DE-CORRECÇÃO

1. a) Moda é 16;
   b)Média aritmética é de 15.5

2.a)A moda é de 41;
b)E a média aritmética é de 42.2.

3. A moda é de carne de pato.

Lição nº 4:
MEDIANA



INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

Lembra-se que na aula passada falamos das medidas de tendência central (moda e média), na presente lição vamos falar ainda da medida de tendência central (mediana).



OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Determinar mediana.



TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de mediana, vai precisar de 2 horas 30 minutos.

9.4.1. Mediana (Md)

A **mediana** de um conjunto de valores, dispostos segundo uma ordem (crescente ou decrescente), é o valor situado de tal forma que o separa em dois subconjuntos de mesmo número de elementos.

9.4.1.1.A mediana em dados não-agrupados

Dada uma série de valores como, por exemplo: {5, 2, 6, 13, 9, 15, 10}.

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo a ser dado é o da ordenação (crescente ou decrescente) dos valores: { 2, 5, 6, **9**, 10, 13, 15 }. O valor que divide a série acima em duas partes iguais é igual a **9**, logo a **Md = 9**.

Método prático para o cálculo da Mediana:

a) Se **a série dada tiver número ímpar de termos:** O valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula: **Md=.(n + 1) / 2**

Exemplo: Calcule a mediana da série {1, 3, 0, 0, 2, 4, 1, 2, 5}

1º - Ordenar a série { 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 }; n = 9 logo (n + 1)/2 é dado por (9+1) / 2 = 5, ou seja, o 5º elemento da série ordenada será a mediana. A mediana será o **5º elemento = 2**

Se a média aritmética for par: O valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula n/2 e n/2 +1, assim, a série de valores: 2, 6, 7, 10, 12, 13, 18, 21.
Para n = 8, temos 8 / 2 = 4 e 8 / 2 + 1 = 5. Logo, a mediana é a média aritmética do 4° e do 5° termo da série, isto é: Md = 10 + 12 / 2 Md = 22 / 2 Md = 11.

9.4.1.2. **Dados agrupados:**

Sem intervalo de classe: Neste caso, basta identificar a frequência acumulada imediatamente superior à metade da soma das frequências. A mediana será aquele valor da variável que corresponde a tal frequência acumulada.
Md= Fi imediatamente superior $\sum f_i$ / 2;

Exemplo:

Notas	(fi)	Fi
14	5	5
15	10	15
16	16	31
17	3	34
$\sum$	34	
$\sum/2$	17	

Seguindo a fórmula o somatório das frequências é 34 e o valor da mediana é o valor imediatamente superior à metade da soma das frequências é 16, por isso a mediana é 16.

ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Para provar a sua compreensão em torno da matéria da média aritmética e moda, resolva os exercícios que se seguem:

2. Com base nos dados abaixo determine:

c) A moda?

d) E a média aritmética?

Notas	**fi**
14	5
15	10
16	16
17	3
∑	25

2. Seja dado os dados: 41, 41, 41, 42, 42 43, 44, 44**,** determine:

c) A moda?

d) E a média aritmética?

3. Determine a moda dos seguintes tipos de carne.

Carnes	Perú	Frango	Pato	Porco	Vaca	Gazela
Nº de consumidores	2	5	12	10	8	3

4. Determine a mediana, moda, e mediana dos seguintes dados:

a) 2, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 16, 18;

b) 5, 7, 10, 13, 65;

c) 5, 7, 10, 13, 15.

CHAVE DE CORRECÇÃO

2. a) Moda é 16;
   b)Média aritmética é de 15.5

2. a)A moda é de 41;
b)E a média aritmética é de 42.2.

3. A moda é de carne de pato.

4. Esperamos que tenha obtido os valores abaixo, se não, esta bem, reveja de novo a matéria e volte a resolver assim como pode buscar mais exercícios.

a) Media=9.6, a mediana =9.5 e moda=2:

b) A média = 20, a mediana = 10 e não apresenta moda (amodal);

c) A média = 9.7 , a mediana = 10 mediana e moda=15.

ACTIVIDADES DA UNIDADE /PREPARAÇÃO PARA O TESTE

1. Separa as variáveis qualitativas das quantitativas

a) Idade;
b) Ano de escolaridade;
c) Sexo;
d) Nota na disciplina de Matemática;
e) tempo gasto diariamente no estudo;
f) distância de casa à escola;
g) local de estudo
h) número de irmãos

1.1. Das variáveis quantitativas, diz quais são contínuas.

2. A tabela abaixo mostra as notas de matemática de um estudante da 12ª classe:

Periodos	**Notas**
1° Trimestre	15
2° Trimestre	12
3° Trimestre	9

Determine:

a)A média aritmética?

b) Faça um gráfico de barra das notas do estudante

c) Moda?

3. A distribuição abaixo indica o número de acidentes ocorridos com 70 motoristas de uma empresa de transporte:

N° de Acidentes	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
N° de Motoristas	20	10	16	9	6	5	3	1

Determine:

a) O número de motoristas que não sofreu nenhum acidente;
b) O número de motoristas que sofreram no máximo 4 acidentes;
c) O número de motoristas que sofreram menos de 3 acidentes;
d) O número de motoristas que sofreram no mínimo 3 e no máximo 5 acidentes;
e) A percentagem dos motoristas que sofreram no máximo 2 acidentes.

4. Considere os salários de 5 pessoas que trabalham em uma empresa são: 700, 00; 800,00; 900,00; 1.000,00 e 1.000,00.

Construa uma tabela de frequência, e determine:

a) A mediana dos salários?

b) O salário médio dessas 5 pessoas?

c) O salário que é recebido pela maioria?

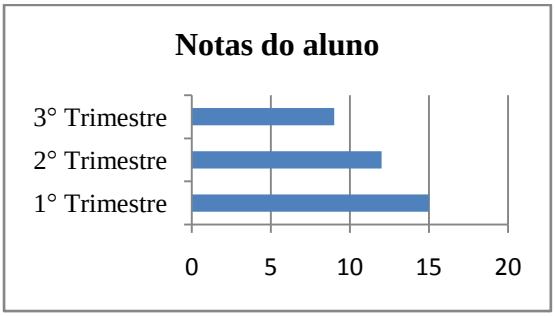
CHAVE DE CORRECÇÃO

1. Quantitativas: a, d, e, f, h. Qualitativas: b, c, g.

1.1. São variáveis quantitativas contínuas: e, f (e eventualmente A; a variável idade também é contínua, pois pode tomar qualquer valor num intervalo, embora seja normalmente tratada como discreta).

2.a) A média aritmética é de 12 valores;

b) Gráfico de barra das notas do estudante



c)As notas são amodal (não tem nota repetida);

3. A maneira mais fácil de responder todas as questões acima, é determinando os tipos de frequências já estudadas e dai apenas retirar na tabela todos os pedidos colocados.

N° de Acidentes	N° de Motoristas(fi)	f_{ri}	F_i	Fri (%)
0	20	0.285714	20	29
1	10	0.142857	30	43
2	16	0.228571	46	66
3	9	0.128571	55	79
4	6	0.085714	61	87
5	5	0.071429	66	94
6	3	0.042857	69	99
7	1	0.014286	70	100

	70	**1**		

Com base na tabela

a) O número de motoristas que não sofreu nenhum acidente é de 20;

b) O número de motoristas que sofreram no máximo 4 acidentes é 61;

c) O número de motoristas que sofreram menos de 3 acidentes é 46;

d) O número de motoristas que sofreram no mínimo 3 e no máximo 5 acidentes são 20;

e) A percentagem dos motoristas que sofreram no máximo 2 acidentes é de 66%.

4.

Salários	**fi**
700, 00	1
800, 00	1
900, 00	1
1000, 00	2

a) A mediana dos salários é 900, 00;

b) O salário médio dessas 5 pessoas é de 880, 00;

c) O salário que é recebido pela maioria e de 1. 000, 00.

6 UNIDADE Nº10: GEOMETRIA ESPACIAL

INTRODUÇÃO DA UNIDADE TEMÁTICA



Bem-vindo a 10ª unidade temática: **Geometria Espacial,** é a ultima unidade a ser abordada nesta classe e é uma unidade não complexa requerendo apenas a sua atenção e esforço para um bom proveito. A geometria assenta suas bases, de um modo geral em proposições, nomeadamente axiomas ou postulados e teoremas. É necessário que o estudante conheça a diferença entre estes dois elementos (axiomas e teoremas).

Esta unidade contem 3 (tês) lições, que objectivam: identificar e interpretar relações espaciais, desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico; Estruturadas de seguinte modo:

Lição1: Conceitos Primitivos;

Lição2: Postulados (axiomas);

Lição3: Posições Relativas;

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar e interpretar relações espaciais;
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico.

RESULTADOS DE APRENDIZAGEM

Estimado estudante no final de estudo da unidade sobre **Geometria Espacial**, você:

- Identificar e interpretar relações espaciais;
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico.

DURAÇÃO DA UNIDADE:

Caro estudante, para o estudo desta unidade temática de **Geometria Espacial,** você vai precisar de 6 horas e 30 minutos.

MATERIAIS COMPLEMENTARES

Para melhor desenvolver o seu estudo nesta lição, você necessita de: Uma sebenta, esferográfica, lápis e borracha e material de geometria.

Lição nº1: Conceitos Primitivos

INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

A Geometria espacial funciona como uma ampliação da Geometria plana e trata de métodos apropriados para o estudo de objectos espaciais assim como para a relação entre esses elementos. Há elementos chaves que devemos conhecer, são chamados noções primitivas e são o ponto, a recta e o plano. Por isso nesta aula vamos falar acerca de conceitos primitivos.

OBJECTIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar os conceitos primitivos;
- Definir os conceitos primitivos.

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para o estudo da lição **Conceitos Primitivos,** você vai precisar de 2 horas e 20 minutos.

10.1.1. Conceitos primitivos

Caro estudante, os **Conceitos primitivos incluem:** ponto, a recta e o plano.

Ponto

Eventualmente já trabalhamos com figuras tais como: o círculo, o triângulo e o quadrado. Em figuras como essas, podemos localizar pontos.

Os centros do círculo: o ponto O;

Os vértices do triângulo: os pontos A, B, e C;

Os vértices do quadrado: os pontos M, N, P e Q.

Recta

Com as mesmas figuras acima, podemos identificar e representar rectas, por exemplo pelo centro do círculo podem passar tantas rectas quantas quisermos e dizemos que por esse ponto passa infinitas rectas, por isso por um dado ponto podem passam infinitas rectas s, t, u, v, x, …

Semi-recta

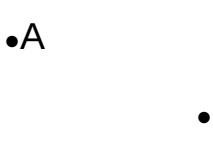
Considerando o ponto R da recta MP, ele divide essa recta em duas semi rectas: a semi-recta de origem em R e que passa por M e a semi-recta com origem em R e que passa por P. Estas duas semi-rectas, RM e RP, são semi-rectas opostas.

Plano

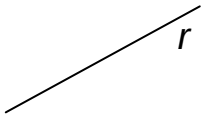
Agora, as faces do cubo como por exemplo o quadrado ABCD, são figuras planas. Observe o plano da face ABCD indicado na figura abaixo. É o plano a.

Ilustrações

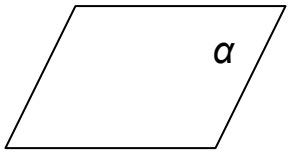
- Ponto:



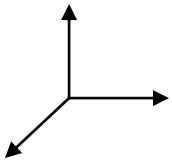
- Recta:



- Plano:



- Espaço:



Lição nº 2:
Postulados (axiomas)

INTRODUÇÃO A LIÇÃO:

A geometria assenta suas bases, de um modo geral em proposições, nomeadamente axiomas ou postulados e teoremas. Dando continuidade do estudo da geometria, nesta lição buscaremos descrever essas proposições.

OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Definir os Postulados (axiomas).

TEMPO DE ESTUDO:

Caro estudante, para estudar a lição de **Postulados (axiomas),** vai precisar de 2 horas e 30 minutos.

10.2.1. Postulados (axiomas)

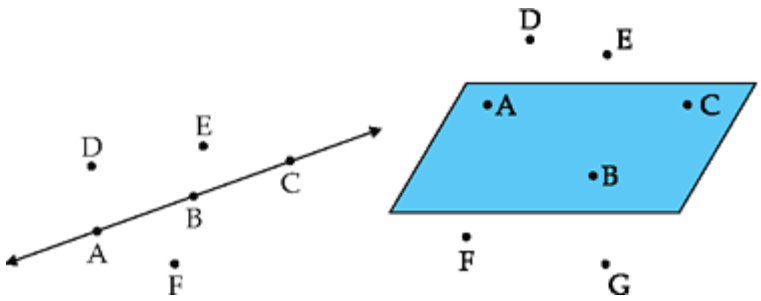
Postulado é a proposição admitida implícita ou explicitamente como princípio de dedução ou de acção.

Postulados de Existência:

Existem infinitos pontos, infinitas rectas, infinitos planos e um único espaço;

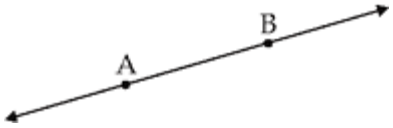
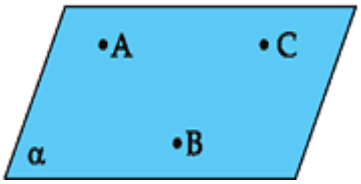
Numa recta, bem como fora dela, existem infinitos pontos;

• Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



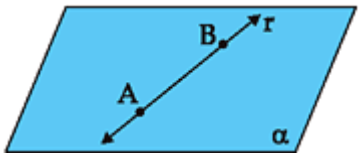
Nesta figura logo ao lado:os pontos A, B e C pertencem a um mesmo plano, portanto, eles são **coplanares**

Postulados da Determinação

Dois pontos distintos determinam uma única recta que os contem. 	Três pontos não-colineares determinam um único plano. 

Postulado da Inclusão

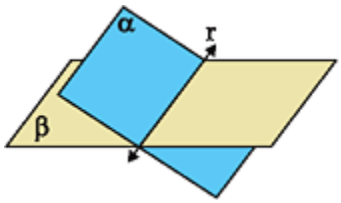
• Uma recta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

Postulado da Intersecção

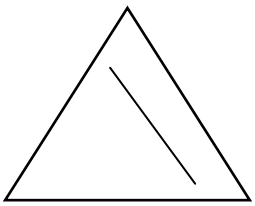
Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então há uma única recta em comum passando por esse ponto.



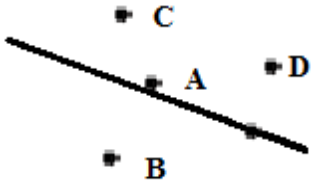
ACTIVIDADES DA LIÇÃO

Caro estudante, assim que chegamos ao fim de mais uma lição, resolva os seguintes exercício:

1. O que dizem os postulado de:
   a) Inclusão?
   b) Determinação?
2. Identifique os postulados expresso nas seguintes figuras:



a) Postulado de: _____



b) Postulado de: _____

CHAVE DE CORRECÇÃO

1. a) Postulado da Intersecção**:** Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então há uma única recta em comum passando por esse ponto.

b) Determinação: Três pontos não-colineares determinam um único plano, assim como dois pontos distintos determinam uma única recta que os contem.

2.a) Postulado de inclusão e b) Postulado de existência.

Lição nº 3:
POSIÇÕES RELATIVAS

INTRODUÇÃO A LIÇÃO

Na geometria espacial uma recta e um plano, assim como entre dois planos podem se estudar posições. Nesta lição iremos estudar as posições relativas paralelas e perpendicular de recta e plano e de planos.

OBJECTIVO DE APRENDIZAGEM

- Identificar posições relativas paralelas e perpendicular de recta e plano;
- Identificar posições relativas paralelas e perpendicular de planos.

TEMPO DE ESTUDO:

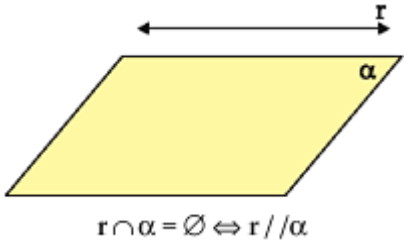
Caro estudante, para estudar a lição de **Posições Relativas** vai precisar de 2 horas 30.

10.3.1. Posições Relativas

10.3.1.1. Posições Relativas: Parelelismo

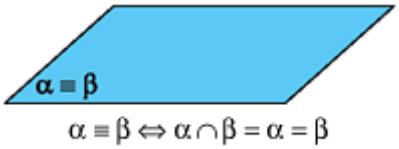
Recta paralela ao plano

Uma recta é paralela a um plano quando eles não têm ponto em comum.



Planos paralelos

Dois planos são **paralelos coincidentes** se têm todos os pontos em comum.



$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Planos paralelos distintos

Dois planos são paralelos distintos quando não têm ponto em comum.

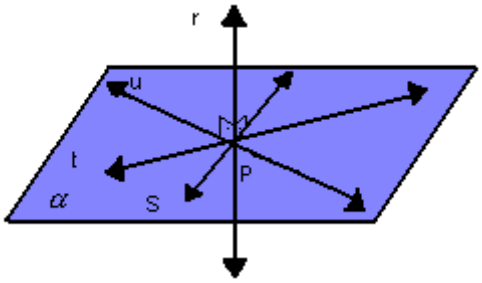


$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha \,//\, \beta$

10.3.1.2. Perpendicularismo

Recta e plano perpendiculares

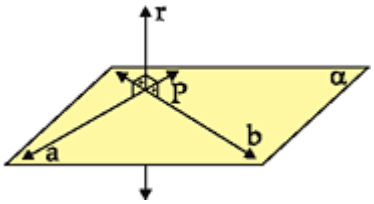
Uma recta r é perpendicular a um plano α se, e somente se, r é perpendicular a todas as rectas de α que passam pelo ponto de intersecção de r e α.



$$\left.\begin{array}{l} r \cap \alpha = \{P\} \\ P \in t, P \in s, P \in u, P \in r \\ r \perp t, r \perp s, r \perp u \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

Teorema Fundamental do Perpendicularismo entre Recta e Plano: Se uma reta é perpendicular a duas rectas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano

$$\textbf{Hipótese:} \begin{cases} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ r \perp a, r \perp b \\ a \cap b = P \end{cases}$$

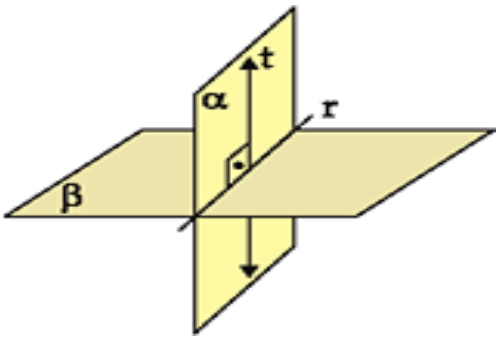


Tese: r é perpendicular ao plano alfa

Planos perpendiculares

Dois planos

Dois planos são **perpendiculares** se um deles contém uma recta perpendicular ao outro.



ACTIVIDADES DA LIÇÃO

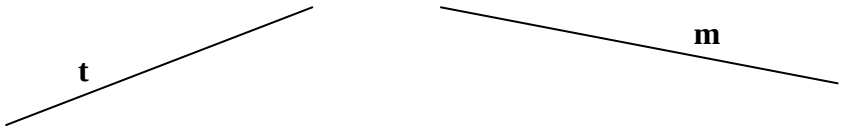
Caro estudante, assim que já terminou a aula de Conceitos Primitivos, você pode resolver os exercícios abaixo:

1. Faça 3 pontos e atribua as seguintes letras respectivamente: T, F, M?
2. Escreva duas rectas separadamente e nomeie a 1ª t e a 2ª m?
3. Esboce um plano triangular α?

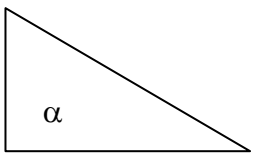
CHAVE DE CORRECÇÃO

1. ●T
●M
●F

2.



3.



ACTIVIDADES DO MODULO

Caro estudante, para consolidar a matéria do presente módulo, resolva os exercícios proposto:

1. Teoria de conjuntos

1.1. Quais são os elementos do conjunto A = {11,12,13,14,5}

1.2. Defina por em extensão, o conjunto B={ x| x é dia da semana que começam com a letra 'S'}

1.3. Com base nestes conjuntos: A = { 3, 4 , 10, 12, 25 }, D = {10,12}, K = {1, 2, 3, 25, 27} e L=Φ

Determine:

a)A-D b)A∪K c)A∩K d)D∪Φ e)D∩Φ

1.4. Foi conduzido um inquérito de formação e emprego, envolvendo 50 de jovens, onde 13 responderam que eram empregados, 20 eram estudantes e 6 responderam que eram empregados e estudantes.

a) Represente os dados num diagrama de Venn

b) Quantos jovens que não responderam se são empregados ou são estudantes?

c)Quantos jovens são empregados ou estudantes?

2. Equações Quadráticas Paramétricas Simples

2.1. Sabe-se que a equação $5x^2 - 4x + 2m = 0$ tem duas raízes reais e diferente. Nessas condições, determine o valor de 'm'.

2.2. Determine o valor de 'p' na equação $x^2 - px + 9 = 0$ para que essa equação tenha um única raiz real.

2.3. Determine o valor de 'm' na equação $12x^2 - mx - 1 = 0$, de modo que a soma das raízes seja 5/6.

3. Equações Biquadráticas

Determine as raízes das seguintes equações Biquadráticas:

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ c) $x^4 - 4 = 3x^2$

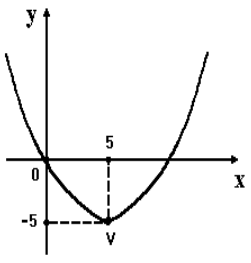
4. Equações quadráticas

Resolva as equações:

a) $4x^2 - 36 = 0$ b) $7x^2 - 21 = 0$ c) $x^2 - 7x = 0$ d) $3x^2 - 4x = 0$ e) $x^2 - 2x+1=0$

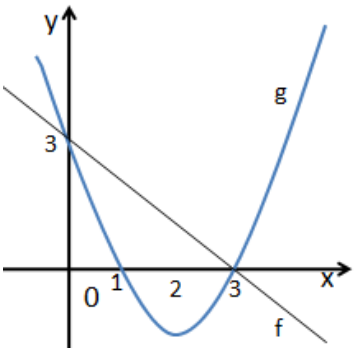
5. Funções quadráticas: observe as figuras e responda as questoes colocadas:

5.1.



a) Qual é o contradomínio?
b) Qual é a equação de eixo de simetria?
c) Determine a expressão analítica?
d) Diga se a função tem o máximo ou mínimo e qual é?

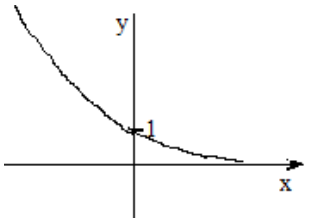
5.2.

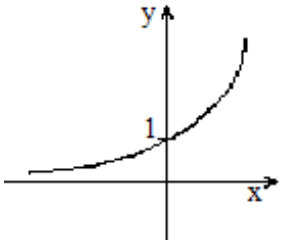


baixo, e diga

a) Qual é o domínio da função g(x)?
b) Contradomínio de f(x)?
c) Quais são os zeros da função g(x)?
d) Qual é a expressão analítica de g(x)?
e) Graficamente em que ponto (s) o f(x)= g(x)?

x)





a) e(x) e f(x) são gráficos de funções exponenciais _____.
b) A raiz de f(x) é x= 1 _____.
c) e(x) é decrescente _____.
d) A Assímptota de vertical de e(x) é x=0 _____.
e) A assímptota horizontal de e(x) é y=0_____.

6.2. Resolva as seguintes inequações:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$ b) $2^{3x+1} < 2^4$ c) $8^x > 32$

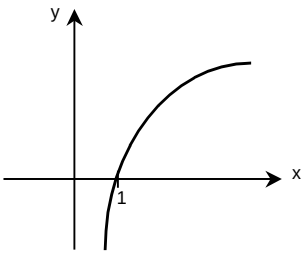
7. Logaritmos:

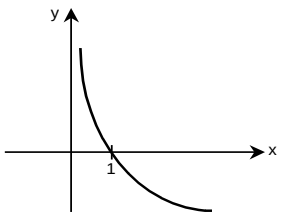
7.1. Resolva as expressões

a) $\log_5(75.25)$ b) $\log_5(\frac{625}{25})$ c) $\log 100 + 2$ d) $\log \log \frac{1}{1000} + 4$

7.2. Considere as figuras abaixo, e diga se as afirmações que se seguem são falsas (F) ou Verdadeiras (V)

g(x) h(x)

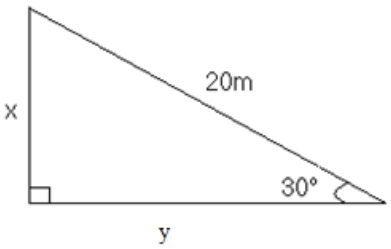




a) g(x) e f(x) são gráficos de funções logaritmicas _____.
b) A raiz de h(x) é x= -1 _____.
c) g(x) é decrescente _____.
d) A Assímptota vertical de h(x) é x=0 _____.
e) g(x) não tem assímptota horizontal _____

8. Trigonometria

8.1. Considerando que foi colocada uma rampa de 20 m e forma 30^o com o chão, como mostra a figura abaixo. (observe na tabela sen 30^o e cos 60^o).



a) Qual é a altura da parede (x) que suporta a rampa?

b) Qual é a medida do chão (y)?

8.2. Resolva as seguintes equações

a)4 sen x - $\sqrt{3}$=2 sen x, x $\in$[0, 180^o] b)3 tg x - $\sqrt{3}$=0 c) 2 cos - $\sqrt{2}$ =0

9. Estatística

9.1. Durante uma semana, fez-se registos de venda de telemóveis do Vendedor A: 5,6,4,5,3,4, 5.

Pretendia se saber:

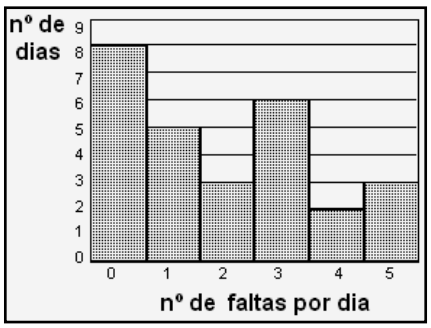
a) Qual é a média de telemóveis vendidos?

b) A moda.

c) A mediana.

d) Construa a tabela de distribuição de frequência absoluta e a frequência relativa.

9.2. O gráfico da figura apresenta dados de faltas diárias dos alunos na classe de uma escola, num determinado período.



a)Em quantos dias foram observados os alunos?

b) Quantos dias os alunos alcançaram um número alto de faltas?

c) Quantas faltas os alunos tiveram no total?

d) Qual é a media das faltas dos alunos

10. Geometria Espacial

10.1. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

a) Dois planos são paralelos quando sua intersecção é vazia _____.

b) Dois planos são paralelos quando sua intersecção é $\alpha = \beta$ _____.

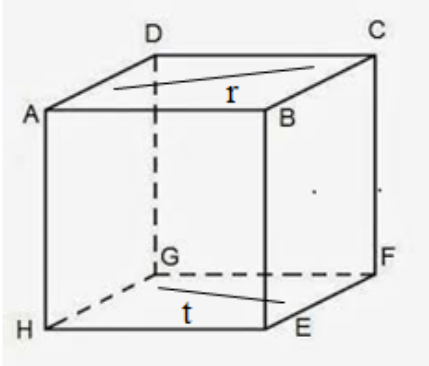
c) Dois planos paralelos α e β não são coincidentes _____.

d) Uma recta é paralela a um plano se ela não tem nenhum ponto em comum com esse plano _____.

10.2. Observe o sólido geométrico:

a) Qual é a posição relativa da recta AB e do plano HGE?

b) Pode-se afirmar que HGD e EFC são paralelos?



CHAVE DE CORRECÇAO

Figura 89

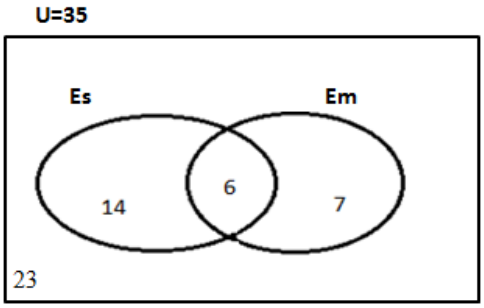
1.1. Os elementos do conjunto A são:11,12,13,14,5.

1.2. C = {Segunda-feira, Sexta-feira, Sábado}

1..3. a)A-D= { 3,4, 25} b)A∪K= {1, 2, 3, 4, 10,12, 25, 27} c)A∩K= { 3,25}

d)D∪Φ= {10,12} e)D∩Φ=Φ

1.4. a)



b) 23 jovens

c) 27 jovens

2.1. $m < 2/5$ 2.2. $p=\pm 6$ 2.3. $m = 10$

3. a)S= {-2,2} b) S={-3,3} c) S= {-2,2}.

4.a) S = {- 3, 3} b) $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ c) S = {0;7} d) $S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$ e) S= {1}

5.1. a) CD:y∈[-5, +∞[b) x=5 c) $y = \frac{x^2}{5} - 2x$ d) minimo=-5

5.2. a) D: x∈ℜ b) CD: y∈ℜ c)x_1=1 e x_2=3 d) $y=x^2-4x+3$ e) x=0 ∨ x=3

6.1. a) V b)F c)V d)F e)V

6.2. a) x∈ [5, + ∞[b) x∈]-∞, 1[c) $x\in]\frac{5}{2}, +\infty[$

7.1. a) x=5 b) x=2 c) x=4 d)x=1

7.2 a) V b)F c)F d) V e) V

8.1. a) x=10 m b)$y=10\sqrt{3}$ m

8.2. a) $x=60^o \vee x=182^o$ b)$x=30^o$ ou $\frac{\pi}{6}$ c)$x=45^o$

9.1 a) A média é de 5 b) moda é 5 c) mediana é 5

d)

Quantidade de telemóveis vendidos	**Frequência absoluta**	**Frequência Relativa**
3	1	14
4	2	29
5	3	43
6	1	14
Totais	7	100

9.2. a) 27 dias b) 3 dias c)52 faltas c) 2 faltas

10.1. a) V, b) F c)F d) V.

10.2. a) A recta AB é paralela ao plano HGE.

b) Sim os dois planos (HGD e EFC) são paralelos;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO,B.F., SILVA,C.X.; Matemática Aula por Aula(geometria espacial), Editora FTD, São Paulo, 2.005;

GRANZOTTO, A . J., Estatística Básica. 2002. P33;

MONDLANE, A. U., *et al.,* Material de Estudo da 10ª classe. Instituto de Educação Aberta e a Distância (IEDA);

NEVES, Á., Apontamentos de Inequações do 2º grau. 2003;

RIGONATTO, M., Equações Trigonométricas, Mundo Educação;

www.professorwaltertadeu.mat.br. Acessado no dia 28 de Junho de 2017.